• Soit $x \in \ker(f)$, donc $f(x) = 0$

$g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$, donc $g(x) \in \ker(f)$

donc $\ker(f)$ est stable par g.

Propriété : F est un K-ev de dimension finie $n = \dim(E)$

F sev de E. $p = \dim(F)$

$f \in \mathcal{L}(E)$, on a alors :

F est stable par $f \Leftrightarrow$ la matrice dans une base de E adaptée à F est triangulaire par blocs.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_p(K)$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$

base de F

avec $A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_p)}(f_F)$

---

démonstration.

$\Rightarrow$: Supposons que f est stable par F.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p, e_{p+1} \dots e_n)$ base de E adaptée à F, $(e_1, \dots, e_p)$ $\mathcal{B}_F$

$f(e_1), \dots, f(e_p)$ sont combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_p)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & + & \cdots & + \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & + & \cdots & + \\ \hline 0 & \cdots & 0 & + & \cdots & + \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & + & \cdots & + \end{array}\right) \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \\ e_n \end{matrix}$$

$f(e_1) \cdots f(e_p) \; f(e_{p+1}) \cdots f(e_n)$

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$

et $\mathrm{Mat}_{(e_1 \longrightarrow e_p)}(f_F) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_p) \\ A & & \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{matrix}$

$\Leftarrow$: on suppose que

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F.

on a alors $f(e_1) \longrightarrow f(e_p)$ combinaison linéaire de $e_1 \longrightarrow e_p$

donc $f(e_1), \longrightarrow f(e_p) \in F$

donc F est stable par f

exemple : $\left(\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longrightarrow & P - XP' + XP'' \end{array} \right)$

donc $f \in \mathcal{L}(E)$. $E = \mathbb{R}_3[X]$.

$\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$f(1) = 1$

$f(X) = 0$

$f(X^2) = -X^2 + 2X$

$f(X^3) = -2X^3 + 6X^2$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix}$
$f(1)\ f(X)\ f(X^2)\ f(X^3)$

donc $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$

$\mathbb{R}_0[X]$ est stable par f $\mathbb{R}_1[X]$ stable par f $\mathbb{R}_2[X]$ stable par f.

propriété $E = F \oplus G$ $\dim(E) \leq +\infty$ $f \in \mathcal{L}(E)$

F et G sont stables par $f \Leftrightarrow$ la matrice f dans une base adaptée à $E = F \oplus G$ est diagonale blocs

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ A matrice de f_F

D matrice de f_G

⇒ Démonstration :

$B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$

Base de F — Base de G

on a $f(e_1), \dots, f(e_p)$ sont combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_p)$

$f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)$ sont combinaison linéaire de $(e_{p+1}, \dots, e_n)$

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right) \begin{array}{l} e_1 \\ e_p \\ e_{p+1} \\ e_n \end{array}$$

$f(e_1) \cdots f(e_p) \quad f(e_{p+1}) \cdots f(e_n)$

⇐ idem

exemple. Dans l'exemple précédent.

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad B = (\underbrace{1}_{\text{Base de } \mathbb{R}_0[X] = F}, \underbrace{X, X^2, X^3}_{\text{Base de vect}(X, X^2, X^3) = G})$$

F et G sont donc stable par f.

Généralisation : $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ $\dim(E)$ finie

$f \in \mathcal{L}(E)$

$F_1, \dots, F_p$ sont stable par f

⇔ la matrice de f dans une base adapté à $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ est diagonal par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ A_i matrice de f_{F_i}

5/ endomorphisme nilpotent.

Definition : E ev, $f \in \mathcal{L}(E)$

f est nilpotent ssi et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^*, f^k = 0$

$\left(f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{(k \text{ fois})} \right)$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$

A est nilpotente ssi et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = 0$

Remarque $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ base de E

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

A est nilpotente $\Leftrightarrow$ f est nilpotent

$$A^k = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f^k)$$

proposition f est un endomorphisme nilpotente de E

(respectivement A matrice nilpotente)

il existe un plus petit entier naturel p tel que

$f^p = 0$ (respectivement $A^p = 0$)

p est appelé indice de nilpotence de f (respectivement A).

Demonstration.

f nilpotent, $H = \{ k \in \mathbb{N}^*, f^k = 0 \}$

$\Rightarrow \emptyset \subset H \subset \mathbb{N}^* \quad H \neq \emptyset$

donc H admet un plus petit élément.

Remarque : $f^k = 0 \Rightarrow f^{k'} = 0$, pour $k' \geq k$

Propriété E tq $\dim(E) = n$

f un endomorphisme nilpotent de E, (resp A) $A \in \mathcal{M}_n(K)$

alors $p \leq n$

(en particulier $f^n = 0$.)

Démonstration. $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. $(p \geq 1)$

$\exists u \in E \quad f^{p-1}(u) \neq 0$

on considère $\mathcal{F} = \left(f^{p-1}(u), f^{p-2}(u), \dots, f(u), u \right)$

on a $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = p$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est libre dans E.

Soient $(\lambda_{p-1}, \lambda_{p-2}, \dots, \lambda_1, \lambda_0) \in K$

$$\lambda_{p-1} f^{p-1}(u) + \lambda_{p-2} f^{p-2}(u) + \dots + \lambda_1 f(u) + \lambda_0 u = 0$$

On compose par f^{p-1}

donc $\lambda_{p-1} \underbrace{f^{2p-2}(u)}_{=0} + \dots + \lambda_1 \underbrace{f^{p}(0)}_{=0} + \lambda_0 f^{p-1}(u) = 0$

$\lambda_0 f^{p-1}(u) = 0, \Rightarrow \lambda_0 = 0$. car $f^{p-1}(u) \neq 0$.

Recurrence. : $P(k) =$ " $\lambda_k = 0 \quad k \in [\![0, p-1]\!]$ "

$P(0)$ est vraie, $\lambda_0 = 0 \Rightarrow$ c'est une récurrence forte.

On suppose $\forall i \in [\![0, k]\!]$ $P(i)$ est vraie

$\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_k = 0$

$$a_{p-1} f^{p-1}(a) + \dots + a_{k+2} f^{k+2}(a) + a_{k+1} f^{k+1}(a) = 0$$

on compose par f^{p-k-2}

$a_{k+1} f^{p-1}(a) = 0$ donc $a_{k+1} = 0$, car $f^{p-1}(a) \neq 0$.

donc $P(k+1)$ est vraie

donc tout les coefficients sont nuls, donc F est libre de cardinal p donc $p \leq \dim E = n$.

Cas particulier : $n = \dim E$

$f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

$(f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0)$ $(p = n)$

$\exists a \in E$, $f^{n-1}(a) \neq 0$. $\mathcal{B} = (f^{n-1}(a), f^{n-2}(a), \dots, f(a), a)$

$\mathcal{B}$ est une base de E.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \uparrow & \ddots & & (0) & \\ 0 & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \uparrow \\ f^n(a) & f^{n-1}(a) & \cdots & f^2(a) & f(a) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f^{n-1}(a) \\ \vdots \\ a \end{matrix}$$

III Déterminant :

1) Notion de déterminant.

Déterminant d'un système de vecteur :

E un K-ev de dimension n.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ famille de E.

$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

$= \begin{pmatrix} & a_{ij} & \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix} e_i$

On admet qu'il existe une unique application

$\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow K$.

$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det(u_1, \dots, u_n)$

telle que • $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $u_i \longmapsto \det(u_1, \dots, u_n)$ est linéaire ($\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire)

• $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ $i \neq j$ $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$

Cela implique que si $u_i = u_j$ alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$.

• $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$

notation :

$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_i & u_n \\ + & + & + \\ | & a_{ij} & | \\ + & + & + \end{vmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_i \\ e_n \end{matrix}$

Propriété $\dim(E) = n$, $\mathcal{B}$ base de E.

$(u_1, \dots, u_n)$ famille de E.

$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

Définition $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $C_i \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$

$\mathcal{B}$ Base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$

$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$

Propriété :

i) $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

ii) A est inversible ssi et seulement si $\det A \neq 0$, et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

iii) $\det(I_n) = 1$

iv) $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$

v) $\det(A^T) = \det(A)$

vi) Si A est triangulaire $A = (a_{ij})$ et $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Définition $\dim E = n$ $f \in \mathcal{L}(E)$

$\mathcal{B}$ base de E

$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$

Ça ne dépend pas de la base choisit car 2 matrices semblables ont le même déterminant.

propriété

i) $\det(f \circ g) = \det f \times \det g$.

iii) $\det(Id_E) = 1$

iii) f est bijective $\Leftrightarrow \det f \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

remarque : $f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

$$\det f = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(f(e_1) \dots f(e_n))$$

$$= \begin{vmatrix} & & & e_1 \\ & a_{ij} & \dots & e_i \\ & \vdots & & \\ f(e_1) & f(e_i) & f(e_n) & e_n \end{vmatrix}$$

2) Calcul d'un déterminant :

$\Delta = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

remarque : si deux colonnes sont proportionnelles, alors le déterminant est nul

$C_1 \longleftrightarrow C_n$ les colonnes de Δ

$L_1 \longleftrightarrow L_n$ les lignes de Δ

On peut faire les opérations suivantes.

- $C_i \longleftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_j C_j$
- $L_i \longleftarrow L_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j L_j$

} ne change que la valeur du déterminant.

les opérations :

- $C_i \leftrightarrow C_j$
- $L_i \leftarrow L_j$

} multiplie Δ par (-1)

Les opérations $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplie Δ par λ.

Attention : si on fait des opérations en simultanée, il ne faut pas exploiter des lignes ou des colonnes que l'on a déjà modifiées

par exemple : $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha_2 L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + \alpha_3 L_1$, $\vdots$, $L_n \leftarrow L_n + \alpha_n L_1$ peuvent être effectué en simultané.

Contre exemple : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ ne peuvent pas être effectué en simultané.

exemple :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

puis, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_n \leftarrow L_n - L_1$

$$\Delta_n = (a+(n-1)b) = \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a-b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

développement par rapport à une ligne et une colonne.

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(K)$$

On note

Δ_{ij} = le déterminant de la matrice extraite de A pour laquelle on a rayé la $j^{ième}$ ligne et la $i^{ième}$ colonne.

Δ_{ij} = mineur d'indice ij

propriété $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

alors

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

(développement du $\det A$ par rapport à la $j^{ième}$ colonne)

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

(développement du $\det A$ par rapport à la $i^{ième}$ ligne.)

Exemple :

ici $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

iii) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ $\quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ $\quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -8.$

3) Déterminant d'une matrice triangulaire par bloc :

Propriété : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} \} p \\ \} q \end{matrix}$

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$

$M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$

alors $\det(A) \times \det(B) = \det(M)$

Démonstration Récurrence sur la taille de A

$P(p)$: $\left(M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \right.$. $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ $\quad B$ est carré

$\left.\text{alors } \det(M) = \det(A)\det(B) \right)$

$P(1) = A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ $\quad B$ étant carré

$M = \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ $\quad \det(M) = a \det(B)$

$= \det(A)\det(B)$

* on développe M par rapport à la première colonne

Supposons $P(p-1)$ vraie

Soit $A \in M_p(K)$

$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ B est une matrice carrée

$B \in M_q(K)$

$\det M = \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$

On développe M par rapport à la première colonne

Posons $M_i = \begin{pmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B \end{pmatrix}$ extraite de M pour laquelle on a rayé la 1ère colonne et la $i$ème ligne. $i \in [\![1, p]\!]$

A_i = matrice extraite de A pour laquelle on a rayé la première colonne et la $i$ème ligne

C_i = matrice extrait de C pour laquelle on la rayé la $i$ème ligne.

Les mineurs de M pour lesquels on a rayé des lignes pour $i \geq p+1$ n'interviennent pas.

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{1+i} \times a_{i1} \det \begin{pmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

On peut appliqué $P(p-1)$ à $\begin{pmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B \end{pmatrix}$

donc $\det(M) = \det(A_i) \det(B)$

Donc $\det(M) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_i) \det(B)$

$\det(A_i)$: mineur d'une matrice

$$\det M = \left(\sum_{i=2}^{p} (-1)^{p+i} a_{i1} \Delta_{i1} \right) \det B$$

développement de A par rapport à la première colonne

$\det(M) = \det(A)\det(B)$ donc P(p) vraie.

exemple.

$$A = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = -6$$

remarque :

Idem pour les matrice triangulaire inferieur par bloc

Généralisation : $M = \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & A_n \end{pmatrix}$

avec $A_1, \ldots, A_p$

des matrices carrés, alors $\det(M) = \det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_n)$

démonstration

recurrence sur le nombre de matrice diagonal.

4/ déterminant du conjugué et conjugué du déterminant.

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Propriété : $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$

Démonstration

$H(n)$: $\left(\begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ \overline{\det A} = \det \overline{A} \end{array} \right.$

$P(1)$: $A = (a)$ $\quad \overline{A} = (\overline{a})$

$\det(A) = a$ et $\overline{\det A} = \overline{a} = \det \overline{A}$

Supposons $H(n+1)$ vraie

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On écrit le développement de $\det A$ par rapport à la première colonne.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \Delta_{i,1}$$

avec $\Delta_{i,1} = \det(A_{i,1})$ | $A_{i,1}$ on traite de A par laquelle on rage $1^{ère}$ colonne et la $i^{ème}$ ligne

$A_{i,1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

$$\overline{\det A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \overline{a}_{i,1} \overline{\Delta}_{i,1}$$

$$\overline{\Delta}_{i,1} = \overline{\det(A_{i,1})} = \det(\overline{A}_{i,1}) \quad H(n+1)$$

$$\det(\overline{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\overline{A}_{i,1})$$

développement du $\det(\overline{A})$ par rapport à la $1^{ère}$ colonne

$\overline{\det A} = \det \overline{A}$ d'où $H(n)$ vraie.

5) Déterminant de Vandermonde

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

On pose

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \leftarrow i$$

$$= \det\left((x_i)^{j-1} \right)_{1 \le i,j \le n}$$

C'est le Vandermonde de $(x_1 \dots x_n)$

propriété $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

$V(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ sont distincts deux à deux.

démonstration

Si $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]$ $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$

alors $V(x_1, \dots, x_n) = 0$

(2 lignes égales)

la formule est vraie dans ce cas.

$H(n)$: ($x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts

alors $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

$H(2)$: (x_1, x_2) distincts

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (x_j - x_i)$$

$H(2)$ vraie

Supposons $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts, $H(n)$ vraie.

$\forall x \in K$.

on pose $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{j-1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & & & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & & x_i^{j-1} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & & & x_n^n \\ 1 & x & x^2 & & x^{j-1} & & x^n \end{vmatrix} \leftarrow i$

$\uparrow$ j

$= V(x_1, x_2, \dots, x_n, x)$

de taille $n+1$

on développe par rapport à la dernière ligne.

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} x^{j-1} \underbrace{\Delta_{n+1,j}}$$

ne dépend pas de x

$x \mapsto P(x)$ fonction polynôme de degré $\leq n$

coefficient devant x^n $\Delta_{n+1,n+1}$

$= V(x_1, \dots, x_n)$

d'après $H(n)$, $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$

car $(x_i - x_n)$ sont deux à deux distincts.

$\deg P = n$ et le coefficient dominant est $V(x_1, \dots, x_n)$

$P(x_1) = 0$, car la 1ère ligne = la dernière ligne.

idem pour $(x_2, \dots, x_n)$

On a trouvé n racines pour P, (toutes les racines).

Soit $x \in K$ $\quad P(x) = V(x_1, \dots, x_n)(x-x_1)(x-x_2)(\dots)(\dots)(x-x_n)$

$P(x_{n+1}) = V(x_1, \dots, x_{n+1})$

donc $V(x_1, \dots, x_{n+1}) = V(x_1, \dots, x_n)(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n)$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \prod_{n \le i < j \le n} (x_{n+1} - x_i)$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \prod_{j=n+1} (x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)$$

d'où $P(x_{n+1})$ convient

et $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ sont deux à deux distincts.

Cas particuliers :

$n=2$ $\quad V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$

$V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

IV Polynômes de Lagrange

Définition $\quad K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

on pose $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in K^{n+1}$ deux à deux distincts.

on pose $\forall i \in [\![0, n]\!]$

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{X - a_k}{a_i - a_k} \right)$$

$L_0, L_1, \dots, L_n$ s'appellent les polynômes de Lagrange

Exemple. $n=2$ (a_0, a_1, a_2)

$$L_0 = \frac{(X-a_1)}{(a_0-a_1)}\frac{(X-a_2)}{(a_0-a_2)}$$

$$L_1 = \frac{X-a_0}{a_1-a_0}\frac{X-a_2}{a_1-a_2}$$

$$L_2 = \frac{X-a_0}{a_2-a_0}\frac{X-a_1}{a_2-a_1}$$

Propriété : $(a_0, \dots a_n) \in K^{n+1}$ 2 à 2 distincts

1) $\forall i \in [\![0,n]\!], \forall j \in [\![0,n]\!]$

$$L_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

2) $\forall i \in [\![0,n]\!]$ $\deg L_i = n$.

3) $\forall P \in K_n[X]$ alors $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$

(en particulier, $\sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i = 1$.

4) $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $K_n[X]$

Démonstration

i) $L_i(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}\right)$

Si $i=j$ $L_i(a_j) = 1$ (produit de n termes valant 1.)

Si $i \neq j$ $L_i(a_j) = 0$ (le numérateur s'annule pour $k=j$)

ii) $\deg(L_i) = n$

iii) $P \in K_n[X]$ $\deg P \leq n$

$$Q = P - \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

$\forall j \in [\![0, n]\!]$

$$Q(a_j) = P(a_j) - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i(a_j)}_{\text{terme tous nul sauf si } i=j}$$

$$= P(a_j) - P(a_j)$$

$$= 0$$

$\deg(Q) \leq n$ et Q admet $n+1$ racine donc $Q = 0$

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

Si $P = 1$ $\quad 1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$

iv) Tout $P \in K_n[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(L_0, \dots, L_n)$ donc $(L_0, \dots L_n)$ est génératrice de $K_n[X]$.

et elle a $n+1$ vecteur

donc c'est une base de $K_n[X]$.

Remarque :

On peut montrer facilement qu'elle est libre.

Supposons : $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$, $\lambda_i \in K$.

$\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = 0$

Tout les terme s'annule sauf pour $i = j$

$\lambda_i = 0$.

Propriété. $(L_0, \dots L_n)$ associés à $(a_0 \dots a_n)$

$B = (1, X, \dots X^n)$ base canonique de $K_n[X]$

$B' = (L_0, L_1, \dots L_n)$

$\det_{B'}(B) = V(a_0, \dots, a_n)$

Démonstration.

$\forall P \in K_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} P(a_i) L_i$

$1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$

$X = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i$

$X^2 = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 L_i$

$\vdots$

$X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i^n L_i$

Donc

$$\det_{B'}(B) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n & L_0 \\ 1 & a_1 & & a_0^n & L_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n & L_n \end{vmatrix}$$

$$= V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

Interpolation :

Propriété $(a_0 \dots a_n) \in K^{n+1}$

$(L_0, \dots L_n)$ polynômes de Lagrange

$\varphi : K_n[X] \longrightarrow K^{n+1}$

$P \longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$

alors φ est un isomorphisme

$\forall (b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1} \quad \exists! P \in K_n[X]$

$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad b_i = P(a_i)$, et $P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$

Demonstration

* φ est linéaire OK.

* Soit $P \in \ker \varphi$, $\varphi(P) = 0$

$(P(a_0), \dots, P(a_n)) = (0, \dots, 0)$

$\forall i \in [\![0, n]\!]$ $P(a_i) = 0$. $P \in K_n[X]$.

$\Rightarrow P = 0$ car P possède $n+1$ racines. $\ker(\varphi) = \{0\}$

φ injective.

* $\dim K_n[X] = n+1 = \dim K^{n+1}$

donc φ est bijective

$\forall (b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1}$, $\exists ! P \in K_n[X]$, $\varphi(P) = (b_0, \dots, b_n)$

exemple : reste de la division de X^n par $X(X-1)(X-2)(X-3)$

avec $(n \geq 4)$

$$X^n = X(X-1)(X-2)(X-3)\,Q + R$$

$\deg(R) < 4$

on evalue en 0 $\quad 0 = R(0)$

en 1 $\quad 1 = R(1)$

en 2 $\quad 2^n = R(2)$

en 3 $\quad 3^n = R(3)$

$$\begin{cases} a_0 = 0 & a_1 = 1 & a_2 = 2 & a_3 = 3 \\ b_0 = 0 & b_1 = 1 & b_2 = 2^n & b_3 = 3^n \end{cases}$$

$R = b_0 L_0 + b_1 L_1 + b_2 L_2 + b_3 L_3$

avec $(L_0, \dots, L_3)$ polynômes de Lagrange associés à $(a_0, \dots, a_3)$

$R = L_1 + 2^n L_2 + 3^n L_3$

$$L_1 = \frac{(X-a_0)(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$= \frac{1(X-2)(X-3)}{1(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3)$$

$$L_2 = \frac{X(X-1)(X-3)}{2\,(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3)$$

$$L_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{3(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$$

<u>autre exemple:</u> $f(x) = e^x$

On cherche une polynôme de degré 2.

$\Rightarrow$ il prend les même valeur que f en 3 point distinct

par exemple

$$P(0) = f(0) = 1$$

$$P(1) = f(1) = e$$

$$P(-1) = f(-1) = e^{-1}$$

(L_0, L_1, L_2) polynome de lagrange associés a $(0, 1, -1)$

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = -1$

$b_0 = 1 \quad b_1 = e \quad b_2 = e^{-1}$

$P = b_0 L_0 + b_1 L_1 + b_2 L_2 = L_0 + L_1 e + L_2 e^{-1}$

$$L_0 = \frac{(X-1)(X+1)}{(0+1)(0-1)} = -(X+1)(X-1)$$

$$L_1 = \frac{X(X+1)}{1(1+1)} = \frac{1}{2}X(X+1)$$

$$L_2 = \frac{X(X-1)}{-1(-1-1)} = \frac{1}{2}X(X-1)$$