feuille 7 ①

ex3 $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$ $u \in \mathcal{L}(E)$

1) $\forall x \in \operatorname{Ker} u^i$ $u^i(x) = 0$ donc $u(u^i(x)) = u(0) = 0$

$u^{i+1}(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} u^{i+1}$

donc $\forall i$ $\operatorname{Ker} u^i \subset \operatorname{Ker} u^{i+1}$

de plus $\operatorname{Ker} u^k = E$

donc on a bien $\{0\} \subset \operatorname{Ker} u \subset \dots \subset \operatorname{Ker} u^{k-1} \subset E$

Supposons $\exists i \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^{i+1}$

montrons que $\forall j \in [\![i+1, k]\!]$ $\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^j$

si $j \in [\![i+1, k]\!]$, on a $\operatorname{Ker} u^i \subset \operatorname{Ker} u^j$.

$P(j)$ $\operatorname{Ker} u^j = \operatorname{Ker} u^i$ (i fixé tel que $\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^{i+1}$)

$P(i)$ est vraie et $P(i+1)$ vraie.

Supposons $P(j-1)$ pour $j-1 \geq i+1$ $\operatorname{Ker} u^{j-1} = \operatorname{Ker} u^i$

Soit $x \in \operatorname{Ker} u^j$ $u^j(x) = 0$

$u^{j-1}(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u^{j-1} = \operatorname{Ker} u^i$

donc $u^i(u(x)) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} u^{i+1} = \operatorname{Ker} u^i$

donc $x \in \operatorname{Ker} u^i$

donc $\operatorname{Ker} u^j \subset \operatorname{Ker} u^i$

et l'inclusion réciproque est évidente

donc $\operatorname{Ker} u^j = \operatorname{Ker} u^i$ $\forall j \geq i+1$

donc $\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^k = E$ $u^i = 0$

pas possible pour $i < k-1$

donc il n'existe pas $i \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^{i+1}$

donc $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$ $\operatorname{Ker} u^i \subsetneq \operatorname{Ker} u^{i+1}$

(inclusion stricte).

donc toutes les inclusions précédentes sont strictes suite ex 3

2) Supposons E de dim finie $\dim E = n$.

$\{0\} \subsetneq \ker u \Rightarrow \dim \ker u \geq 1$

$\ker u \subsetneq \ker u^2 \Rightarrow \dim \ker u^2 \geq \dim \ker u + 1 \geq 2$

par récurrence $\forall i \in [\![1, k]\!]$. $\dim \ker u^i \geq i$

$\dim E = \dim \ker u^k \geq k$

$\Rightarrow$ $\underline{k \leq n}$ donc $\underline{u^n = 0}$

feuille 7

ex 4 $u, v \in \mathcal{L}(E)$

($\Rightarrow$) Supposons $u \circ v \in GL(E)$ ($u \circ v$ bijectif).
alors u est surjectif et v est injectif
(cf cours de PCSI).

on veut montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} v$

analyse : Soit $x \in E$ $\quad x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in \ker u$
$\quad x_2 \in \operatorname{Im} v$

$\exists x_3 \in E, \ x_2 = v(x_3)$

$x = x_1 + v(x_3)$

$u(x) = u(x_1) + u \circ v(x_3) = u \circ v(x_3)$

$\Rightarrow x_3 = (u \circ v)^{-1}(u(x)) \Rightarrow x_2 = v \circ (u \circ v)^{-1} \circ u(x)$

$x_1 = x - x_2 = x - v \circ (u \circ v)^{-1} \circ u(x)$

synthèse : Soit $x \in E$

posons $x_1 = x - v \circ (u \circ v)^{-1} \circ u(x)$

$x_2 = v \circ (u \circ v)^{-1} \circ u(x)$

on a clairement $x_1 + x_2 = x$ et $x_2 \in \operatorname{Im} v$

$u(x_1) = u(x) - u \circ v \circ (u \circ v)^{-1} \circ u(x) = u(x) - u(x) = 0$

donc $x_1 \in \ker u$

donc $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} v$

($\Leftarrow$) Supposons u surjectif, v injectif et $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} v$

Soit $x \in \ker(u \circ v)$ $\quad u \circ v(x) = 0$

$v(x) \in \ker u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$

donc $v(x) = 0$ donc $x \in \ker v = \{0\}$

donc $x = 0$

donc $\ker u \circ v = \{0\}$ donc $u \circ v$ injective.

Soit $x \in E$, $\exists x' \in E$, $x = u(x')$ car u surjective

$x' = x'_1 + x'_2$ avec $x'_1 \in \ker u$ et $x'_2 \in \operatorname{Im} v$ $\quad x'_2 = v(x'_3)$

$x = u \circ v(x'_3)$ donc $u \circ v$ surjective donc $u \circ v$ bijective

feuille 7

ex 5

p, q projecteurs de E

Supposons $p \circ q + q \circ p = 0$ (*)

en composant (*) par p : $p^2 \circ q + p \circ q \circ p = 0$

$p \circ q + p \circ q \circ p = 0$ (**)

en recomposant par p : $p \circ q \circ p + p \circ q \circ p^2 = 0$

$2 p \circ q \circ p = 0$ donc $p \circ q \circ p = 0$

en injectant dans (**) : $p \circ q = 0$

en injectant dans (*) : $q \circ p = 0$.

$p+q$ est un projecteur de E ssi $(p+q) \circ (p+q) = p+q$
(car $p+q$ est linéaire)

$(p+q) \circ (p+q) = p+q$

$\Leftrightarrow p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p+q \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0$

$\Leftrightarrow p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$
d'après ce qui précède.

donc $p+q$ est un projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$

montrons que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}\,q$ alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$
donc $(p+q)(x) = 0$

$\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}\,q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$ $(p+q)(x) = 0$

$p(x) + q(x) = 0$

on compose par p : $p(x) + p \circ q(x) = 0$ (car $p^2(x) = p(x)$)

or $p \circ q = 0$. donc $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$

donc $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$.

suite ex 5

on veut montrer $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$

Soit $x \in \operatorname{Im}(p+q)$

$\exists x' \in E, \quad x = (p+q)(x') = p(x') + q(x') \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$

donc $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$

Soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$

$\exists x_1 \in E, \exists x_2 \in E, \quad x = p(x_1) + q(x_2)$

on compose par p : $p(x) = p(x_1) + \underbrace{p \circ q(x_2)}_{=0}$

$p(x) = p(x_1)$

de même $q(x) = \underbrace{q \circ p(x_1)}_{=0} + q(x_2)$

donc $x = p(x) + q(x) = (p+q)(x) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$

donc $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

on a même $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$

en effet : soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$

$\exists x_1 \in E, \exists x_2 \in E, \quad x = p(x_1) = q(x_2)$

alors $p(x) = p(x_1) = p \circ q(x_2) = 0$

mais $p(x_1) = x$ donc $x = 0$

donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$

ainsi $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$

feuille 7

ex 10 $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

on suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$ $(*)$

On veut montrer que $A = B$.

on applique la relation $(*)$ à toutes les matrices E_{kl} de la base canonique.

$$E_{kl} = \begin{array}{c|c} & l \\ k & \begin{pmatrix} (0) & \vdots & (0) \\ \cdots & 1 & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix} \end{array} \qquad E_{kl} = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec $e_{ij} = \delta_{ik}\,\delta_{jl}$

$A = (a_{ij})$ $\quad AE_{kl} = (c_{ij})$ $\quad BE_{kl} = (d_{ij})$

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, e_{pj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\,\delta_{pk}\,\delta_{lj}$$

si $j \neq l$ $\quad c_{ij} = 0$ $\quad$ et si $j = l$ $\quad c_{il} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\delta_{pk} = a_{ik}$

$$AE_{kl} = \begin{array}{c} l \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{1k} & \\ (0) & a_{lk} & (0) \\ & \vdots \; 0 & \\ & a_{nk} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{idem } BE_{kl} = \begin{array}{c} l \\ \begin{pmatrix} 0 & b_{1k} & \\ (0) & b_{lk} & (0) \\ & \vdots \; 0 & \\ & b_{nk} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\operatorname{tr}(AE_{kl}) = a_{lk}$

donc $\operatorname{tr}(AE_{kl}) = \operatorname{tr}(BE_{kl}) \Rightarrow a_{lk} = b_{lk}$

et ceci $\forall l, k$ donc $\underline{A = B}$.

__autre façon :__ $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, E_{ij}$ $\qquad AE_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \underbrace{E_{ij}E_{kl}}_{=\delta_{jk} E_{il}}$

$$AE_{kl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, E_{il}$$

$$\operatorname{tr}(AE_{kl}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, \underbrace{\operatorname{tr}(E_{il})}_{=\delta_{il}} = a_{lk}$$

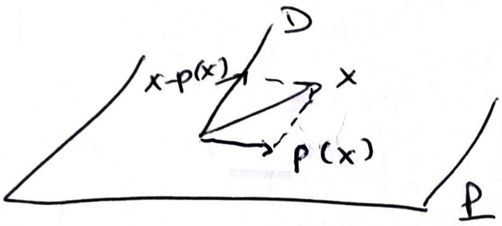
feuille 7

ex 17 $E = \mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{P} : x + y - 2z = 0$

p = projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $D = \text{Vect}(-1,1,1)$

Soit $X \in \mathbb{R}^3$ $\quad X = (x, y, z)$

$p(X) \in \mathcal{P}$ et $X - p(X) \in D$



$p(X) = (x', y', z') \in \mathcal{P}$ donc $x' + y' - 2z' = 0$ $(*)$

et $X - p(X) = (x - x', y - y', z - z') \in D$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $X - p(X) = \lambda(-1,1,1)$

$$\begin{cases} x - x' = -\lambda \\ y - y' = \lambda \\ z - z' = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y - \lambda \\ z' = z - \lambda \end{cases}$$

on reporte dans $(*)$: $x + \lambda + y - \lambda - 2(z - \lambda) = 0$

$x + y - 2z = -2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z$

$x' = x + \lambda = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z$

$y' = y - \lambda = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - z$

$z' = z - \lambda = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

$$\text{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3/2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

---

on peut vérifier que $p \circ p = p$ que $\text{Im}\, p = \mathcal{P}$

et $\text{Ker}\, p = D$.

feuille 7

ex 19 $\dim E = n$. $f \in \mathcal{L}(E)$, $\ker f = \operatorname{Im} f$

Th du rang : $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$

$\Rightarrow 2 \dim \operatorname{Im} f = n$

donc n est pair et $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = \frac{n}{2}$

on veut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_p, e_{p+1}, .. e_n)$ notons $p = \frac{n}{2}$

telle que $f(e_1) = 0 \dots f(e_p) = 0$ $f(e_{p+1}) = e_1 \dots f(e_{2p}) = e_p$

Considérons $(e_1 \dots, e_p)$ une base de $\ker f$.

c'est aussi une base de $\operatorname{Im} f$

$\exists e_{p+1} \in E$ tq $e_1 = f(e_{p+1})$

$\dots \exists e_{2p} \in E$, $e_p = f(e_{2p})$

Montrons que $(e_1 \dots ; e_{2p})$ est libre.

Soient $\lambda_1 \dots, \lambda_{2p} \in K$ tq

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_{2p} e_{2p} = 0$

on compose par f : $\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \dots + \lambda_{2p} f(e_{2p}) = 0$

car $e_1, \dots ; e_p \in \ker f$

donc $\lambda_{p+1} e_1 + \dots + \lambda_{2p} e_p = 0$

or $(e_1, \dots, e_p)$ est libre donc $\lambda_{p+1} = 0 \dots \lambda_{2p} = 0$

donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$ donc $\lambda_1 = 0 \dots \lambda_p = 0$

donc $\mathcal{B} = (e_1 \dots, e_{2p})$ est libre et de bon cardinal

donc c'est une base de E $(2p = n)$

$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

feuille 7

ex 22

$f \in \mathcal{L}(E)$, p projecteur de E

$(\Rightarrow)$ Supposons que f commute avec p

alors $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Ker}\,p$ sont stables par f

(c'est du cours).

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Ker}\,p$ sont stables par f

$E = \mathrm{Ker}\,p \oplus \mathrm{Im}\,p$ car p est un projecteur

Soit $x \in E$ $\quad x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in \mathrm{Ker}\,p,\ x_2 \in \mathrm{Im}\,p$

$p(x) = p(x_2) = x_2$ (car x_2 est invariant par p)

$f \circ p(x) = f(x_2)$

$x = x_1 + x_2 \rightarrow f(x) = f(x_1) + f(x_2)$

$p \circ f(x) = p \circ f(x_1) + p \circ f(x_2)$

$x_1 \in \mathrm{Ker}\,p$ donc $f(x_1) \in \mathrm{Ker}\,p$ car $\mathrm{Ker}\,p$ est stable par f

donc $p \circ f(x_1) = 0$

$x_2 \in \mathrm{Im}\,p$ donc $f(x_2) \in \mathrm{Im}\,p$ car $\mathrm{Im}\,p$ est stable par f

donc $f(x_2)$ est invariant par p

donc $p \circ f(x_2) = f(x_2)$

donc $p \circ f(x) = f(x_2) = f \circ p(x)$

$\forall x \in E$ $\quad p \circ f(x) = f \circ p(x)$ donc $p \circ f = f \circ p$

donc p et f commutent

feuille 7

ex 23

$(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ $\quad A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij})$

$AB = (c_{ij}) \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|$

et $|a_{ik}| \leq N(A) \quad |b_{kj}| \leq N(B)$

donc $|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{n} N(A)N(B)$

$\forall i j \quad |c_{ij}| \leq n\, N(A) N(B)$

par passage au sup : $\underline{N(AB) \leq n\, N(A) N(B)} \quad (*)$

Attention : ici n est fixé et correspond à la taille des matrices.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$

on note $A^k = (\alpha_{ij}(k))_{1 \leq i,j \leq n}$

(attention, a priori $\alpha_{ij}(k) \neq a_{ij}^k$)

on va montrer que la série $\sum \frac{\alpha_{ij}(k)}{k!}$ converge.

par def $|\alpha_{ij}(k)| \leq N(A^k)$

d'après $(*)$ avec $A=B$: $\quad N(A^2) \leq n (N(A))^2$

$N(A^3) = N(A^2 A) \leq n\, N(A^2) N(A) \leq n^2 (N(A))^3$

par récurrence $\forall k \quad N(A^k) \leq n^{k-1} (N(A))^k$

donc $\forall i,j \quad |\alpha_{ij}(k)| \leq n^{k-1} (N(A))^k$

donc $\forall i,j$ $\quad \dfrac{|\alpha_{ij}(k)|}{k!} \leq \dfrac{n^{k-1}(N(A))^k}{k!}$

posons $u_k = \dfrac{n^{k-1}(N(A))^k}{k!} > 0$ $\quad$ (on suppose $A \neq 0$ donc $N(A) \neq 0$)

montrons que $\sum u_k$ converge.

on applique d'Alembert :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n^k (N(A))^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{n^{k-1}(N(A))^k} = \frac{n\, N(A)}{k+1} \to 0 \ (k \to +\infty)$$

donc $\sum u_k$ converge.

par comparaison $\sum \dfrac{\alpha_{ij}(k)}{k!}$ converge (absolument).

$(S_p)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_{ij}(k)}{k!}$ $\quad$ c'est la somme partielle de la série $\sum \dfrac{\alpha_{ij}(k)}{k!}$

donc $(S_p)_{i,j}$ converge.

c'est vrai $\forall i,j$ donc la suite de matrice (S_p) converge

on pose $\exp A = \displaystyle\lim_{p \to +\infty} S_p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C$

$A^2 = 0$ donc $\forall p \geq 1$ $\quad S_p = I_3 + A$ $\quad$ donc $S_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} I_3 + A$

donc $\exp A = I_3 + A$ idem $\exp B = I_3 + B$ et $\exp A \exp B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

on remarque que $C^2 = I_2$ donc si k est pair $C^k = I_2$

si k est impair $C^k = C$

$$S_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \frac{C^k}{k!} = \left(\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{(2i)!}\right) I_2 + \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{(2i+1)!}\right) C \to \alpha I_2 + \beta C \quad (p \to +\infty)$$

$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\exp(A+B) \neq \exp A \exp B$.