Révisions : Suites , fonctions, comparaison des suites et des fonctions

1) 1) Théorème de Césaro : soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle ou complexe convergeant vers l et $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$ .Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers l (étudier d'abord le cas où $l=0$)

2) Application : Soit $(u_n)_{n\in N}$ telle que $\forall n \quad u_n>0$ .On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in N}$ converge vers $\lambda>0$

.Montrer que $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers λ .Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

2) Soit $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=x(1-x)$ .Soit (u_n) définie par : $u_0\in\,]0,1[$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=f(u_n)$

1) Montrer que (u_n) converge vers 0 .
2) On pose $v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}$ .En appliquant le théorème de Césaro à (v_n) , déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n\to+\infty$.

3) Soit $f(x)=\frac{3}{4(1+2x^2)}$ .Soit la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0\in[0,1]$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\in[0,1]$ et que ½ est le seul point fixe de f dans $[0,1]$,

b) Majorer $|f'(x)|$ pour $x\in[0,1]$

c) Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in N}$

4) Soit n un entier , $n\geq 2$, et $\forall x\in R_+^*\quad f_n(x)=\ln x-x+n$

1) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution dans $]0,1[$ appelée x_n .
2) En considérant $f_{n+1}(x_n)$, montrer que la suite (x_n) est décroissante .
3) Montrer que $\ln x_n\to-\infty\quad(n\to+\infty)$ .En déduire la limite de (x_n) .
4) Montrer que $x_n\sim e^{-n}\quad(n\to+\infty)$
5) Montrer que $x_n=e^{-n}+e^{-2n}+o(e^{-2n})\quad(n\to+\infty)$

5) Soit f définie par $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{e^x-1+2x}{3}$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que sa réciproque est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f^{-1}

6) Déterminer un équivalent en 0 de $\frac{x-shx}{x-\sin x}$

7) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

8) Déterminer un équivalent en 0 de $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$

9) Soit $f(x)=\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$. Déterminer le domaine de définition de f et sa limite en $+\infty$. Montrer que $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ lorsque $x\to+\infty$ pour $\alpha>0$

10) Asymptote et position par rapport à l'asymptote en $+\infty$ de $x\mapsto\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt[3]{x^6+x^4}$

11) DL à l'ordre 4 en 0 de $f(x)=Arc\tan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.Equation de la tangente en 0 et position de la courbe par rapport à la tangente

12) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+1)!}{\sqrt{n}\,2^{2n}(n!)^2}$

13) Déterminer un équivalent en $\dfrac{\pi}{2}$ de $f(x)=x\tan x-\dfrac{\pi}{2\cos x}$

14) Déterminer (presque) sans calcul un équivalent lorsque $n\to+\infty$ de :

a) $\ln(\ln n)-2\ln n+\dfrac{\ln n}{n}$ b) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ c) $\dfrac{e^n}{n!}+\dfrac{1}{\ln n}$

15) Inégalité de Jensen (pour une fonction convexe)

a) Soit f une application convexe sur un intervalle I

Soient $(x_1,\dots,x_n)\in I^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$

Montrer que $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$ (*)

Indication : on procèdera par récurrence sur n . Pour l'hérédité (passage du rang n au rang n+1), poser $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$, appliquer l'inégalité de convexité avec les coefficients S et $1-S$

b) Que donne l'inégalité (*) pour une fonction concave ?

c) Application : Soient $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$

Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\ge\prod\limits_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}$. En particulier justifier que $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ge\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/n}$.