Séries numériques

1) Etudier la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous

1) $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$ 2) $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ 3) $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 4) $u_n = \dfrac{1}{n^{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}}$

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ 6) $u_n = \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 7) $u_n = e^{-(\ln n)^\alpha}$ 8) $u_n = (\ln n)^{-\ln n}$

9) $u_n = \dfrac{n^n}{3^{n^2}}$ 10) $u_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$ 11) $u_n = Arc\cos\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)$

2) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,p(n)^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10 .

3) Groupement de termes : nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}\,n}$

Indication : déterminer un équivalent de $u_{2n} + u_{2n+1}$

4) En encadrant $\sum_{k=1}^{n} \ln k$ par des intégrales, montrer que $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) \to -1 \quad (n \to +\infty)$

En déduire que $(n!)^{1/n} \sim \dfrac{n}{e} \quad (n \to +\infty)$

Peut-on retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stirling ?

5) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est un carré , $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ sinon .

6) Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = a^{S_n}$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $a > 0$.

7) Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

8) Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs . On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + v_n$ où la série $\sum v_n$ est absolument convergente et $\alpha > 0$.

a) Montrer que l'on peut écrire $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\dfrac{\alpha}{n} + w_n$ avec $\sum w_n$ absolument convergente .

b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^\alpha}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

c) Application : nature de la série $u_n = \dfrac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}$

9) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge et calculer alors sa somme .

10) On pose $u_n = \dfrac{1}{n(4n^2-1)}$. Décomposer u_n en éléments simples . Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme .

11) On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ pour $n \geq 2$. Etudier la convergence de la suite (u_n)

12) Produit de Cauchy : Soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ .Montrer que la série $\sum u_n$ converge . soit $\sum v_n$ le produit de Cauchy de $\sum u_n$ avec elle-même . Montrer que $\sum v_n$ diverge .

13) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs pour laquelle il existe $\alpha > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$\forall n \geq n_0 \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha$. Montrer que $\sum u_n$ converge .Ex : $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}$