Intégration sur un segment

1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\ln(k+n)-\ln n\right)$

2) Calculer 1) $\int_0^1 x\,e^{x^2}dx$ 3) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-x}}}dx$ 4) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x-e^x}dx$

5) $\int_0^1 x^2\left(2+x^3\right)^5 dx$ 6) $\int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

3) Calculer $\int_0^{3.5} x^{\lfloor x\rfloor}dx$

4) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

1) Calculer I_1

2) Montrer que pour $n\geq 1$, $I_{n+1}=-\frac{2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n$

3) Montrer que pour tout n , $0\leq I_n$

4) En déduire que pour $n\geq 1$, $I_n\geq \frac{2^{n+1}}{e^2(n+1)}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

5) Déterminer f , non nulle , continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\int_a^b |f(t)|dt=\left|\int_a^b f(t)dt\right|$

Indication : écrire $\int_a^b f$ sous forme exponentielle.

6) Soit $f\in C^2([0,1],\mathbb{R})$ .Trouver a et b tels que $\int_0^1 x^n f(x)dx=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ($n\to+\infty$)

7) Calculer a) $\int^X \frac{(x-1)dx}{(x+1)^2(x-2)}$ b) $\int^X \frac{x\,dx}{x^2-x+1}$

c) $\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$ (changement de variable $t=\sin x$)

d) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}$ (changement de variable) e) $\int^x t^n \ln t\,dt$ (IPP) f) $\int^x \frac{dt}{cht+1}$

8) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt = l$

Indication : traiter d'abord le cas $l=0$ (en revenant à la définition de la limite)

9) Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ .Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que g peut être prolongée en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.

10) Soit $f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Etudier f , tracer son graphe . Préciser la pente de la tangente en 0

11) Démontrer que $\int_1^n \frac{e^t}{t}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{n}$

12) Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=a$ et $f(1)=b$ avec a et b deux réels fixés . Calculer $\inf_{f\in E}\left(\int_0^1 f'^2\right)$. Cet inf est il atteint ?

13) Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a<b$) . Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\sup_{t\in[a,b]}\left|f''(t)\right|$$

Indication : appliquer Taylor reste intégral à la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt - \frac{x-a}{2}\big(f(x)+f(a)\big)$

Quelle majoration obtient t'on en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange ?

14) X-ENS Soit f une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 , strictement croissante telle que $f(0)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .Soit $a>0$ et $b>0$.

1) Montrer que $a\,f(a) = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,dt$

2) En déduire que $a\,b \le \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt$