Intégrales impropres

1) Etudier l'existence des intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{\alpha+x}\right)dx$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}dx$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-x\ln x}dx$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$ d) $\displaystyle\int_0^1 e^{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x}\ln x\right)}dx$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\left(\ln x-\ln\left(1-e^{-x}\right)\right)dx$

f) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+x}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)dx$ g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$

2) 1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ converge (faire une IPP sur $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$)

2) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ converge

On veut montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ diverge

3) Par l'absurde supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ converge . Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ converge puis obtenir une contradiction avec 2)

3) Prouver l'existence des intégrales suivantes et les calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^n\,dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}$ c) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}$

pour $n\geq 2$ (changement de var iable $x=sht$)

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^3}$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\cos t)e^{-t}\,dt$ g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t+i}$

4) Soit f continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $t\mapsto t^2f^2(t)$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$

a) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \int_0^x f(t)\,dt+\int_x^{+\infty}f(t)\,dt\leq\sqrt{x}\left(\int_0^{+\infty}f^2(t)\,dt\right)^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^{+\infty}t^2f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

c) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq 2\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt\right)^{1/4}\left(\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)\,dt\right)^{1/4}$

5) On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

1) Montrer que I et J sont convergentes et $J = 2I$

2) On pose $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Etudier les variations de F sur $\mathbb{R}$ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$

3) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $F(x)$

4) Montrer qu'il existe une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\int_{u_n}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{I}{n}$

Etudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n)