Espaces vectoriels normés (partie 1)

1) $E=\mathbb{R}[X]$, pour $P\in E$, $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $N_1(P)=\sum_{k=0}^{n}|a_k|$

$N_\infty(P)=\max_{0\le k\le n}|a_k|$. Montrer que cela définit deux normes sur E . Sont-elles équivalentes ?

2) Soit $E=\left\{f\in C^1([0,1],\mathbb{R}) \setminus f(0)=0\right\}$. Pour $f\in E$, posons $N(f)=\|f'+f\|_\infty$. Montrer que N définit une norme sur E .

3) $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$ .Pour $f\in E$ on pose $N(f)=\sqrt{f(0)^2+\int_0^1 f'^2}$

Montrer que N est une norme sur E .

4) On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad P_n(\cos x)=\cos(nx)$ (polynômes de Tchebychev)

1) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$

$$(P\setminus Q)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

2) Montrer que les éléments de la famille $(P_0,\dots,P_n)$ sont 2 à 2 orthogonaux et calculer la norme euclidienne de chacun

3) (question indépendante) Soit $E=C([-1,1],\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\forall(f,g)\in E^2$

$(f\setminus g)=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Pour $f\in E$, on pose $\|f\|_2=\sqrt{(f\setminus f)}$ (norme euclidienne)

b) on pose également $\|f\|_1=\int_{-1}^{1}|f(t)|dt$ et $\|f\|_\infty=\underset{t\in[-1,1]}{Sup}|f(t)|$

Montrer que $\|\ \|_1$ est une norme sur E

c) Montrer qu'il existe une constante α telle que $\forall f\in E\ \ \|f\|_2\le\alpha\|f\|_\infty$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer qu'il existe une constante β telle que $\forall f\in E\ \ \|f\|_1\le\beta\|f\|_2$

5) Soit $a\ge 0$, on pose $E=\mathbb{R}[X]$ .Pour $f\in E$ on pose $N_a(P)=|P(a)|+\int_0^1|P'(t)|dt$

a) Montrer que N_a est une norme sur E .

b) Soit $b\ge 0$. Montrer que si $(a,b)\in[0,1]^2$, N_a et N_b sont équivalentes

c) Montrer que si $a\ne b$ et $b>1$ N_a et N_b ne sont pas équivalentes

6) $E=\mathbb{R}[X]$, pour $P\in E$, $P=\sum_{k=0}^{n}a_k X^k$, on pose $N_1(P)=\sum_{k=0}^{n}|a_k|$ et $N(P)=\int_0^1|P(t)|dt$

.On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $P_n=X^n$ et $Q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}X^k$. Peut on affirmer que les suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent ou divergent pour les normes N_1 et N ? Justifiez votre réponse

7) $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$, pour $f\in E$ on pose $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ et $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $\forall x\in[0,1]$ $f_n(x)=n\,x^n(1-x)+1$ et $f(x)=1$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f pour les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$