Révisions d'algèbre et d'algèbre linéaire

1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer module et argument de $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$

2 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x \neq 0$

3 Trouver les nombres complexes z tels que les points d'affixe z, z^2, z^4 soient alignés .

4 Soient a, b, c trois complexes

Montrer que les points d'affixes a, b, c forment un triangle équilatéral si et seulement si

$a + b\,j + c\,j^2 = 0$ ou $a + c\,j + b\,j^2 = 0$

5 Soit E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f = f \circ f \circ f$. Montrer que f est surjective si et seulement si f est injective .

6 Soit $f : E \to F$ une application. $A_1, A_2 \subset E$ *et* $B_1, B_2 \subset F$ Montrer que

1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
3) f *est injective* $\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

7 Polynômes de Tchebichev :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

Montrer que $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall n \in N \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$

Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n . Factoriser P_n .

8 Soit $P \in K[X]$ et $a, b \in K$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?
(on distinguera deux cas : $a \neq b$ et $a = b$)

9 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (X-1)^3 \setminus nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$

10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

1) Montrer que si a est racine de P alors a^2 aussi . En déduire $a = 0$ ou $|a| = 1$.
2) Montrer que 0 n'est pas racine de P .
3) Montrer que si a est racine de P alors $|a+1| = 1$.
4) En déduire les racines de P et la factorisation de P .

11 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P = (X+1)^n - (X-1)^n$, en déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

12 X-ENS Soit P un polynôme réel scindé à racines simples $x_1,\dots,x_n$, $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

1) Calculer $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$

2) Montrer que $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $P^{(k-1)}$ est scindé à racines simples

3) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ $P(x)P''(x)-\left(P'(x)\right)^2\le 0$

4) Montrer que $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$ $a_{k-1}\,a_{k+1}\le a_k^2$

13 Soit $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ et $I=I_3$

On veut calculer A^n

1) 1$^{\text{ière}}$ méthode : Calculer J^k pour $k\in N$ et en déduire A^n pour $n\in N$

2) 2$^{\text{ième}}$ méthode : Montrer $\forall n\in N^*$ $\exists\, a_n, b_n\in Z$ $A^n=a_n A+b_n I$

Déterminer les valeurs de a_n *et* b_n .En déduire A^n

14 Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f\in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $Mat_B(f)=A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&5\\-1&0&-2\end{bmatrix}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f

15 Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f\in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $Mat_B(f)=A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

1) Trouver (e'_1,e'_2) une base de $Ker(f-Id)$ et (e'_3) une base de $Ker(f-2\,Id)$

2) Montrer que (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (appelée B')

3) Déterminer $D=Mat_{B'}(f)$ et calculer D^n

4) Donner un mode de calcul de A^n (on ne fera pas les calculs effectifs)

16 Soit $a\in R$ .Déterminer le rang du système de vecteurs :

$u_1=(1,2,2a)$ $u_2=(1+a,2,1)$ $u_3=(2,2,1+a)$

17 $E=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad \textit{dérivables}\}$ $F=\{f\in E\setminus f(0)=f'(0)=0\}$

$G=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad f(x)=\alpha\,e^x+\beta\,e^{-x}\}$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$

Montrer que $Kerf = Kerf^2 \quad \Leftrightarrow \quad E = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$

19 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f, g \in L(E)$

1) Montrer que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. En déduire que $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

2) Supposons que $f \circ g = 0$ et $f+g$ est bijective .

a) Montrer que $\operatorname{Im} g \subset Kerf$

b) Montrer que $rg(f) + rg(g) \leq n$ puis $rg(f) + rg(g) = n$

c) En déduire $\operatorname{Im} g = Kerf$

20 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .Soit f définie sur $E = M_2(\mathbb{R})$ par $\forall M \in E \quad f(M) = M\,A$

Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique de E

Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $Kerf$

21 Soit $\varphi : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $\varphi(P) = (n+1)P - X\,P'$

1) Montrer que φ est bien définie et linéaire .
2) Déterminer $Ker\varphi$
3) Montrer que φ est surjective

22 Soit $E = R_n[X]$ avec $n \geq 3$. Soit $P_k = (X-1)^k$ (k variant de 0 à n) et φ définie sur E par :

$\forall P \in E \quad \varphi(P) = (X-1)^2 P'' - 2(X-1)P' + 2P - 2P(1)$

1) Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E .

2) Montrer que φ est un endomorphisme de E . Calculer $\varphi(P_k)$ pour k variant de 0 à n .

3) Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $Ker\varphi$ et $(P_3, P_4, \ldots, P_n)$ est une base de $\operatorname{Im}\varphi$