Algèbre linéaire , matrices

1 Soit $u \in L(E)$ telle que $\forall x \in E \quad u(x) \in Vect(x)$ .Montrer que u est une homothétie .

2 Soient A, B, C, D quatre sous espaces vectoriels de E tels que $A+B$ et $C+D$ sont en somme directe ainsi que $A+C$ et $B+D$ .Montrer que A, B, C, D sont en somme directe (indication : pensez que $A \subset A+C$ et $B \subset B+D$)

3 Soit $u \in L(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$ .On dit que u *est nilpotent d'indice* k .

1) Montrer les inclusions strictes $\{0\} \subset Ker(u) \subset Ker(u^2) \subset \cdots \subset Ker(u^{k-1}) \subset E$

2) Montrer que si E est de dimension finie n alors $k \leq n$ (et donc $u^n = 0$)

4 u et v sont deux endomorphismes de E , montrer l'équivalence :

$u \circ v \in GL(E) \Leftrightarrow u$ surjectif , v injectif et $E = Ker(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$

5 Soient p et q deux projecteurs de E . Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = q \circ p = 0$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur de E

Dans ce cas , déterminer $Ker(p+q)$ et $\operatorname{Im}(p+q)$

6 On suppose que $\dim E$ est finie , soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$

7 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) = n \geq 1$; On suppose qu'il existe $n+1$ rationnels $r_0, \ldots, r_n$, distincts deux à deux tels que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(r_k) \in \mathbb{Q}$ .Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

8 Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p éléments 2 à 2 distincts dans $[0,1]$.On pose $F = \{f \in E \setminus \forall i \in [\![1, p]\!] \; f(a_i) = 0\}$

Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E

9 Soit $f \in L(E)$ tel que $f^3 = f^2 + 2f$ .On pose $E_1 = Ker(f)$, $E_2 = Ker(f + Id_E)$, $E_3 = Ker(f - 2\,Id_E)$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$

10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $M_n(K)$ .On suppose que $\forall M \in M_n(K) \; tr(AM) = tr(BM)$ .Montrer que $A = B$

11 Existe-t-il des matrices A et B dans $M_n(K)$ telles que $AB - BA = I_n$?

12 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et A' sont semblables .

13 Soit A une matrice carrée de rang 1 .

1) Montrer qu'il existe C une colonne non nulle et L une ligne non nulle telles que $A = CL$. Montrer alors que $Tr(A) = LC$.

2) Montrer que $A^2 = tr(A)A$

14 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé .Déterminer la matrice de f dans la base (e_2, e_4, e_1, e_3) . En déduire un plan stable par f

15 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$

1) calculer le rang de M en fonction de ceux de A et de $B - A$. En déduire que si M est inversible alors A et $B - A$ aussi

2) Calculer M^{-1} si elle existe (résoudre le système $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$)

16 Soit E de dimension finie et $u \in L(E)$, montrer que $u^2 = 0 \Leftrightarrow \exists p$ projecteur de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

17 Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique , déterminer la matrice de la projection sur le plan $P : x + y - 2z = 0$ parallèlement à la droite $D = Vect(-1,1,1)$

18 Soient $A, B \in M_n(K)$. Résoudre dans $M_n(K)$ l'équation $X + tr(X)A = B$

19 Soit E de dimension finie n , $f \in L(E)$ tel que $Kerf = \operatorname{Im} f$. Montrer que n est pair et qu'il existe B une base de E telle que la matrice de f dans la base B soit $\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

20 Soit $(p_1, \dots, p_n)$ une famille de projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E

On suppose que $p = p_1 + \cdots + p_n$ est un projecteur . Montrer que $rg\, p = \sum_{i=1}^{n} rg\, p_i$

21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $Tr(A) \neq 0$

.Soit $f : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto (TrA)M - (TrM)A$

Montrer que $f \in L(M_n(\mathbb{R}))$ .déterminer le noyau et l'image de f

22 Soit $f \in L(E)$, p un projecteur de E.

Montrer que f commute avec $p \Leftrightarrow \operatorname{Im} p$ et $Kerp$ sont stables par f

Indication : pour $\Leftarrow$, exploiter le fait que $E = Kerp \oplus \operatorname{Im} p$

23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{1 \le i, j \le n} |M_{i,j}|$

Trouver $K > 0$ tel que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2 \quad N(AB) \le K\, N(A) N(B)$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$. Montrer que pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ **,** la suite $\left(\left(S_p\right)_{i\,j}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge . On pose $\exp A = \lim_{p\to\infty} S_p$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .Déterminer $\exp A$ et $\exp B$. A t'on $\exp(A+B) = \exp A \exp B$?

24 **X-ENS** Soit E un K-espace vectoriel de dimension n , $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in L(E)$ défini par $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $u(e_i) = e_{i+1}$ et $u(e_n) = 0$

1) Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence
2) Déterminer les sous espaces de E stables par u .