Déterminants

1 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})$ .On pose pour $z \in \mathbb{C}$ $A(z) = (a_{i,j} + z)$

Montrer que la fonction $z \mapsto \det A(z)$ est polynômiale de degré inférieur ou égal à 1 .

Application : pour $a, b, c \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$

2 Calculer le déterminant de la matrice décomposée en blocs carrés de taille n : $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 4A \end{pmatrix}$

3 Soient A et B deux matrices carrées réelles .Prouver que $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \geq 0$

4 Soient A, B, C des matrices carrées de taille n .Calculer les déterminants des matrices définies par blocs :

1) $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

5 Montrer que si A , B , C , D des éléments de $M_n(K)$ tels que $DC = CD$ et D est inversible .

alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

(indication : écrire $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ avec * des blocs à déterminer)

6 Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$ et deux matrices $A \in M_{n,p}(K)$; $B \in M_{p,n}(K)$. Montrer que $\det(AB) = 0$.

7 Soit $\begin{array}{rcl} \varphi : M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}$ .Calculer $\det \varphi$

8 Calcul de déterminants : Calculer les déterminants suivants

1) $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$;4) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ (faire intervenir un Vandermonde)

9 Déterminants d'ordre n

1) $\begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$;

10 Soit A_n la matrice carrée dont tous les coefficients valent 1 sauf les coefficients diagonaux qui valent $a_{ii} = i+2$ .Montrer que $\det A_n = \det\left(u+2e_1, u+3e_2, \ldots, u+(n+1)e_n\right)$ avec $u=(1,1,\ldots,1)$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ .En déduire que $\det(A_n) = (n+1)!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$

11 Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des complexes et $P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)$ pour $x \in \mathbb{C}$

Et $\Delta(x) = \begin{vmatrix} \frac{P(x)}{x-\lambda_1} & \frac{P(x)}{x-\lambda_2} & \cdots & \cdots & \frac{P(x)}{x-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & & & & \lambda_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$

Montrer qu'on peut prolonger Δ par continuité en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et calculer $\Delta(\lambda_1), \ldots, \Delta(\lambda_n)$

Montrer que Δ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ et le calculer