Suites et séries de fonctions

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x\left(1+x^2\right)}dx$

2) Déterminer un équivalent lorsque $n\to+\infty$ de $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{1+t^2}dt$

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1\ln\left(1+t^n\right)dt$

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}$ puis un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1\frac{du}{1+u^n}-1$

Indication : écrire $\int_0^1\frac{du}{1+u^n}-1$ sous forme d'intégrale puis effectuer un changement de variable

5) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,dx$

6) Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

a) $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{x}{1+nx}$. b) $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{1+nx}$.

c) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et convergence uniforme locale.

d) $f_n:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\ln\left(\frac{x^2 n}{1+nx}\right)$.

e) $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x\left(1+n^\alpha e^{-nx}\right)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\sqrt{n}\,e^{-nx}\right)dx$.

7) Soit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 3^n\left(x^{2^n}-x^{2^{n+1}}\right)$ .Prouver la convergence simple de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n$ et $\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}f_n$. Que peut on en déduire ?

8) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{n\,x}{n^4 + x^2}$ .Etudier convergence simple et normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$

9) Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ .Etudier convergence simple , normale et uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n$.

10) Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n\,x^2\,e^{-x\sqrt{n}}$. Etudier convergence simple et normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$

puis la convergence normale locale . Que peut on en déduire sur la continuité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$?

11) On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{sh(nx)}$

1) Etudier la convergence simple et normale de cette série sur des domaines à préciser . Sur quel domaine f est elle continue ?
2) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

12) Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+n\,x)}$

1) Montrer que si $x > 0$, $S(x)$ est bien définie . Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \to +\infty$
2) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

13) Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{Arc\tan(n\,x)}{n^2}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

14) Montrer que

1) $\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n}$ 2) $\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

15) Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-n^2 x}}{n}$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ ..
2) Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^+$
3) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ .Montrer que $f(x) \sim -e^{-x} \quad (x \to +\infty)$

16) Soit $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ (fonction Zéta alternée)

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi_x : t\mapsto (\ln t)t^{-x}$. Etudier les variations de φ_x sur $[1,+\infty[$

4) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

17) Calculer $\int_0^{1/2}\frac{dt}{1-t}$. En déduire que $\ln 2=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$

18) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$ (on admet que $\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$)

19) Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x)=\ln(1+x^n)$

1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f

2) Montrer que quand $x\to 1^-$, $f(x)\sim\frac{K}{1-x}$ avec $K=\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-u})du$

20) Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+e^t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (on pourra montrer que $\frac{1}{1+e^t}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-nt}$)