# Réduction

**1** Soit $E=\mathbb{R}[X]$. On pose pour $P\in E$ , $\varphi(P)=(X^2-1)P'-2XP$ . Montrer que $\varphi\in L(E)$ , déterminer ses valeurs propres, sous espaces propres.

**2** Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. On pose pour $P\in E$ , $\varphi(P)=X^2P'-nXP$ . Montrer que $\varphi\in L(E)$ , déterminer ses valeurs propres, sous espaces propres.

**3** Soit $E=\left\{f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\setminus f(0)=0\right\}$ et $T$ défini sur E par $T(f):x\mapsto\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt$ .Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer ses éléments propres .

**4** Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ avec $A$ inversible , $P$ le polynôme caractéristique de $A$ et $Q$ celui de $A^{-1}$ .Donner une relation entre $P\left(\lambda^{-1}\right)$ et $Q(\lambda)$

**5** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $Tr(A)\neq 0$ .Soit $\begin{array}{l} f:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}) \\ \quad M \quad\mapsto (TrA)M-(TrM)A \end{array}$

Montrer que $f\in L\left(M_n(\mathbb{R})\right)$ .déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $f$ .

$f$ est elle diagonalisable ?

**6** a) Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ , montrer que $\det\left(\overline{A}\right)=\overline{\det(A)}$ ( procéder par récurrence sur n )

b) Soient $A,B\in M_n(K)$, montrer que $\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}=\det(A+iB)\det(A-iB)$

c) En déduire que si $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ alors $\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}\geq 0$

d) Soit $A\in M_n(K)$ et $M=\begin{pmatrix}0 & -A\\ A & 0\end{pmatrix}$. En utilisant b) , calculer le polynôme caractéristique de $M$ et

déterminer les valeurs propres de $M$ en fonction des valeurs propres de $A$

Retrouver ce résultat sans calculer le polynôme caractéristique et déterminer les sous espaces propres de $M$ en fonction de ceux de $A$

**7** Considérons la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ et $\chi_n$ son polynôme caractéristique .

1) Pour $\alpha \in ]0,\pi[$, on pose $u_n = \chi_n(2\cos\alpha)$. Calculer $u_n$

2) Déterminer les valeurs propres de $A_n$. Quelle est la dimension des sous espaces propres de $A_n$ ?

3) Déterminer les sous espaces propres de $A_n$ ( on pourra résoudre un système $A_n X = \lambda X$ en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $x_0 = x_{n+1} = 0$ )

**8** Soient $(u,v) \in (L(E))^2$, montrer que $Sp(u \circ v) \setminus \{0\} = Sp(v \circ u) \setminus \{0\}$

**9** On pose $E = M_2(\mathbb{R})$ .Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $f : M \in E \mapsto AM - MB$

1) Montrer que $f \in L(E)$

2) Sans écrire la matrice de $A$ dans la base canonique de $E$, déterminer une base de $Kerf$ , une base de $Ker(f - Id_E)$ et une base de $Ker(f + Id_E)$. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de $f$ ? Les a-t-on toutes trouvées ? $f$ est-elle diagonalisable ?

3) Retrouver le résultat de la question 2) en écrivant la matrice de $f$ dans la base canonique de $E$.

Diagonaliser $f$

**10** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie , $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$ tels que $\exists k \in \mathbb{C}^* \quad u \circ v - v \circ u = k\, v$

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u \circ v^p - v^p \circ u = k\, p\, v^p$

2) Soit $\begin{aligned} \varphi_u : L(E) &\to L(E) \\ w &\mapsto u \circ w - w \circ u \end{aligned}$ . Déterminer $\varphi_u(v^p)$

3) En déduire que $v$ est nilpotent .

**11** Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1) Diagonaliser $A$
2) Déterminer un moyen de calculer $A^n$

**12** En reprenant la matrice de l'exercice 11, déterminer toutes les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A$ et résoudre l'équation $M^2 = A$ dans $M_3(\mathbb{R})$

**13** Les matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont elles semblables ?

**14** Soit $a \in \mathbb{R}$ , la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ a & a & -a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

Si oui, la diagonaliser.

**15** Diagonaliser les matrices :

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

**16** Soit la suite $(u_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = -2u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$ ; $u_0 = 1$ ; $u_1 = 2$ ; $u_3 = 0$

Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A$ telle que $X_{n+1} = A X_n$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$ . En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$

**17**

1) Montrer que toute matrice de $M_n(K)$ est la limite d'une suite de matrices inversibles de $M_n(K)$
2) Soient $A$ et $B$ dans $M_n(K)$ , montrer que $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique ( on pourra supposer d'abord que $A$ est inversible puis généraliser )

3) On rappelle que si $A$ , $B$ , $C$ , $D$ des éléments de $M_n(K)$ tels que $DC = CD$ et $D$ est inversible alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ ( voir feuille sur les déterminants ) . Généraliser au cas où $D$ n'est pas inversible .

***18*** Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ , $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$

Montrer que $B$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ .

***19*** Soit $E$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ .

Montrer que $u$ est nilpotent $\Leftrightarrow$ $Sp(u) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec que des 0 sur la diagonale .

***20*** Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + 2M + 2I_n = 0$ . Calculer $Tr(M)$ et $\det(M)$

***21*** $A = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ? ( calculer $A^2$ )

***22*** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer les éléments propres de $B$ en fonction de ceux de $A$ .

Montrer que $B$ est diagonalisable ssi $A$ est diagonalisable et inversible .

***23*** Soit $A$ une matrice carrée et $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$ .Déterminer $A$ pour que $B$ soit diagonalisable

( on pourra exprimer $P(B)$ où $P$ est un polynôme )

***24*** Déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^5 = A^2$ et $Tr(A) = n$

***25*** Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2$ soit diagonalisable . Montrer que $A$ soit diagonalisable .

***26*** Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 4A^2$ .On suppose de plus que 2 et -2 sont valeurs propres de $A$ . Montrer que $A$ est diagonalisable ( on distinguera deux cas suivant que $A$ est inversible ou non )

**27** Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=Mat_B(u)$ ($u\in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$)

On considère $F$ un plan stable par $u$ et $u_F$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$

1) Montrer que le polynôme caractéristique de $u_F$ est $X^2+1$
2) Montrer que $F=Ker\left(u^2+Id\right)$ ( on pourra penser à appliquer le théorème de Cayley-Hamilton )
3) En déduire tous les plans stables par $u$

**28** Soit $A\in M_n(K)$ tel que $rg(A)=1$

1) Quelles sont les valeurs propres possibles de $A$ ?
2) Montrer que $A$ est soit diagonalisable , soit nilpotente et donner une condition nécessaire et suffisante sur $Tr(A)$ pour que $A$ soit diagonalisable

**29** Soit $X$ une matrice colonne réelle à $n$ lignes .Montrer que $\det\left(I_n+X\,X^T\right)=1+X^T\,X$

**30** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u\in L(E)$ .Soit $C(u)=\left\{v\in L(E)\setminus v\circ u=u\circ v\right\}$. Déterminer la dimension de $C(u)$ dans les cas suivants :

1) Le polynôme caractéristique de $u$ est scindé à racines simples .
2) $u$ est diagonalisable : on posera $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les valeurs propres de $u$ d'ordre de multiplicité $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$

**31** Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$. Trigonaliser $A$

**32** **X-ENS** Soit $M\in M_n(\mathbb{C})$

Montrer que $M$ est nilpotente si et seulement si $Tr(M)=Tr\left(M^2\right)=\cdots=Tr\left(M^n\right)=0$.

***33*** Exponentielle de matrice

On admettra que $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N : M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \sup_{1 \le i,j \le n} |M_{i,j}|$

1) Montrer que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2 \quad N(AB) \le n N(A) N(B)$

2) En déduire une majoration de $N(A^k)$ en fonction de $N(A)$, $n$ et $k$

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$ . On pose $A^k = (a_{i,j}(k))_{1 \le i,j \le n}$

Montrer que pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ , la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_{i,j}(k)}{k!}$ converge absolument . En déduire que la suite de matrices $(S_p)$ converge. On pose $\exp A = \lim_{p \to \infty} S_p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

4) Déterminer l'exponentielle d'une matrice diagonale. En particulier, déterminer l'exponentielle d'une matrice de la forme $\lambda I_n$

5) Soient $A, A' \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices semblables vérifiant $A' = P^{-1} A P$ . Montrer que $\exp A' = P^{-1} (\exp A) P$ . En particulier, comment calcule t'on l'exponentielle d'une matrice diagonalisable ?

6) Déterminer l'exponentielle d'une matrice nilpotente

7) Soit $T$ une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Montrer que $\exp T$ est triangulaire supérieure et déterminer ses coefficients diagonaux.

8) En déduire que $\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \det(\exp A) = e^{trA}$

9) Cas particulier $n = 2$ . On considère des matrices de $M_2(\mathbb{C})$

a) Déterminer l'exponentielle d'une matrice de $M_2(\mathbb{C})$ admettant deux valeurs propres distinctes.

b) Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ admettant une valeur propre double $\lambda$ et telle que $A \ne \lambda I_2$ .

Montrer que $A$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Montrer que $\exp T = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$. En déduire un mode de calcul de $\exp A$

c) Application numérique : calculer $\exp A$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$