Probabilités

1) On dispose de n boites pouvant contenir de 0 à n boules numérotées de 1 à n . On place les n boules au hasard dans les n boites .

On désigne par p_n la probabilité pour que chaque boite contienne exactement une boule .. Montrer que $p_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Déterminer la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$

2) On lance 4 dés équilibrés .Quelle est la probabilité :

1) D'avoir un carré ?
2) D'avoir un brelan ?
3) D'avoir exactement une paire ?
4) D'avoir une double paire ?

3) Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges . On tire 3 boules en remettant à chaque tirage la boule tirée si celle ci est rouge , en ne la remettant pas si elle est blanche .

1) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?
2) La deuxième boule tirée est rouge , quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

4) Dans une entreprise , un technicien passe chaque semaine pour s'occuper de l'entretien des machines .A chacun de ses passages hebdomadaires , il décide , pour chaque machine , si une intervention est ou non nécessaire .Pour un certain type de machines , le technicien est intervenu la première semaine de leur installation et a constaté que : -s'il est intervenu la n-ième semaine , la probabilité qu'il intervienne la (n+1)-ième semaine est égale à $\dfrac{3}{4}$ -s'il n'est pas intervenu la n-ième semaine , la probabilité qu'il intervienne la (n+1)-ième semaine est égale à $\dfrac{1}{10}$

On désigne par E_n l'évènement « le technicien intervient la n-ième semaine » .On pose $p_n = P(E_n)$

Calculer p_n .Déterminer la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$

5) On lance plusieurs fois une pièce donnant pile avec une probabilité p . Quelle est la probabilité qu'au n-ième tirage il apparaisse

a) Un pile pour la première fois ?
b) Un pile pour la deuxième fois ?
c) Un pile pour la k ième fois ? ($1 \le k \le n$)

6) On met en vente 50 enveloppes « mystère » . Chaque joueur ouvre l'enveloppe immédiatement après l'avoir achetée et découvre s'il a gagné ou non . Une seule des enveloppes est gagnante. Calculer la probabilité que ce soit l'acheteur numéro k qui gagne .Quel acheteur a le plus de chances de gagner ?

7) On prend $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathrm{T} = P(\mathbb{N})$. On fixe $c \in]0,1[$ et on pose pour $k \in \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = \alpha \dfrac{c^k}{k!}$

Calculer α pour $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), P)$ soit un espace probabilisé et calculer la probabilité de l'ensemble des entiers naturels impairs .

8) On considère 3 urnes identiques A , B , C .Elles contiennent des boules blanches et des boules noires avec moitié boules blanches, moitié boules noires. On effectue n tirages avec remise . Au départ on tire dans l'urne A . Ensuite , si la boule tirée est blanche , on tire la boule suivante dans la même urne , sinon on tire la boule suivante dans une des deux autres urnes , choisie équiprobablement . On continue cette règle jusqu'au n-ième tirage . On appelle a_n , b_n , c_n la probabilité que le n-ième tirage soit effectué dans l'urne A (resp B , resp C) . On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1) Donner X_1
2) En appliquant la formule des probabilités totales , montrer qu'il existe une matrice M indépendante de n telle que $X_{n+1} = M X_n$. En déduire $X_n = M^{n-1} X_1$
3) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est une combinaison linéaire de I_3 et J . Calculer J^k et en déduire M^{n-1}
4) En déduire a_n , b_n , c_n ainsi que leur limite .

9) Soit (Ω, T) un univers probabilisable , écrire avec les opérations ensemblistes (intersection , union , complémentaire) les évènements suivants :

1) L'un au moins des évènements A , B ou C est réalisé .
2) L'un et seulement des évènements A et B est réalisé .
3) Les évènements A et B sont réalisés et C ne l'est pas
4) Tous les évènements A_n pour $n \geq 1$ sont réalisés
5) L'un au moins des évènements A_n pour $n \geq 1$ est réalisé
6) Une infinité d'évènements parmi les évènements A_n pour $n \geq 1$ sont réalisés
7) Seul un nombre fini des évènements A_n pour $n \geq 1$ est réalisé
8) Une infinités d'évènements parmi les A_n pour $n \geq 1$ ne sont pas réalisés
9) Tous les évènements A_n pour $n \geq 1$ sont réalisés à partir d'un certain rang

10) Un joueur lance une pièce donnant pile avec une probabilité p jusqu'à l'obtention du premier pile.

S'il a effectué n tirages pour avoir son premier pile, , il relance la pièce n fois et il gagne s'il obtient une (et une seule fois) face dans ces n tirages .Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

11) Soit $p \in]0,1[$ et $a > 0$. Lors d'une étude démographique , on interroge au hasard une famille . La probabilité d'interroger une famille de n enfants est $a\,p^n$. Les naissances sont indépendantes et la probabilité pour qu'un bébé soit un garçon est de 5/11 .

On note A_n : « la famille interrogée a n enfants » ; E_k : « la famille interrogée a au moins k enfants » ;

G_k : « la famille interrogée a k garçons »

1) Déterminer la condition pour que les hypothèses aient un sens .
2) Déterminer la probabilité que dans une famille de n enfants il y ait k garçons

3) Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant au moins k enfants ait exactement k garçons ?

12) Anaïs et Benjamin lancent à tour de rôle le même dé cubique parfait . Anaïs joue en premier . Le vainqueur est le premier qui obtient un 6 .On considère les évènements A : « Anaïs gagne la partie » B « Benjamin gagne la partie » et pour $n \in \mathbb{N}^*$ S_n : « on obtient 6 au nième lancer » et F_n : « la partie se termine au n-ième lancé »

1) Exprimer A et B à l'aide des F_n puis des S_n
2) Calculer la probabilité de l'évènement F_n . En déduire la probabilité de A et de B .
3) Soit D l'évènement « il n'y a pas de vainqueur » . Quelle est sa probabilité ? Est-ce l'évènement impossible ?

13) On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois (faces numérotées de 1 à 5) . On appelle p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancés soit paire . Calculer p_1 . Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire p_n

14) On lance n pièces de monnaie , la probabilité que la k-ième pièce amène pile valant $\dfrac{1}{2k+1}$ .Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de piles ?

15) Une urne contient une boule blanche et une boule rouge . On tire dans cette urne une boule , on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de 2 autres boules de la même couleur puis on répète l'opération

1) Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soit rouges ?
2) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?
3) Le résultat précédent reste t'il vrai si on remet la boule accompagnée de 3 autres boules de la même couleur ?

16) Une urne contient 6 boules dont 4 blanches et 2 noires . On tire successivement et avec remise une boule dans cette urne . On note d_n la probabilité que lors des n premiers tirages n'apparaissent pas deux boules blanches consécutives .

1) Calculer d_1 et d_2
2) En conditionnant par le résultat des 2 premiers tirages , déterminer une relation entre d_{n+2} , d_{n+1} et d_n
3) Calculer d_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$

17) **X-ENS** On note $d(n)$ le nombre de bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui lui-même qui n'admettent aucun point invariant (dérangements) . On convient que $d(0)=1$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$

b) En déduire que $d(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k!$

c) Un voiturier a mélangé les clefs des voitures de ses n clients . Quelle est la probabilité qu'aucun client ne retrouve sa propre clef ? donner la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$