Séries entières

1) Pour les séries entières suivantes , déterminer le rayon de convergence et le domaine réel de convergence :

1) $\sum \frac{e^{-3n}}{\sqrt{n}} x^{2n}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$ 3) $\sum Arc\tan\left(n^{\alpha}\right) x^n$ 4) $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) x^n$

5) $\sum \frac{1}{\ln n + (-1)^n n^{1/2}} x^n$ 6) $\sum \frac{x^{n^2}}{n!}$ 7) $\sum \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n x^n$

8) $\sum a_n x^n$ avec a_n le nombre de diviseurs de n

2) Déterminer le rayon de convergence , le domaine réel de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n+1)}$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$ et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^{2n}$ 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\right) x^n$ 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n} x^n$ 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} x^{2n+1}$ (montrer que la somme est solution de l'équation différentielle $\left(x^2-2\right)y' + xy + 2 = 0$)

3) Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes et le rayon de convergence .

1) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ 2) $f(x) = Arc\tan\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 3) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)$

4) $f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 5) $f(x) = chx\cos x$

4) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{3n}$ avec $u_0 = 2$ et pour $n \geq 1$ $u_n = \frac{(n+2)!}{\prod_{k=1}^{n} 3k}$

1) Déterminer le rayon de convergence R . Etudier le cas $x = R$
2) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f et déterminer f .

5) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ où la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ $u_1 = 3$ et pour $n \geq 2$ $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$

1) Déterminer u_n, en déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière.

2) Sans passer par le calcul explicite de (u_n), déterminer la somme de la série entière en utilisant la relation liant u_n, u_{n-1}, u_{n-2}

6) On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ où la suite (u_n) est définie par $u_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$

1) Montrer que $\sum u_n$ diverge (on pourra remarquer que $\frac{1+t^2}{2} \geq t$)

2) Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge

3) En déduire le rayon de convergence de la série entière et calculer sa somme

7) Comparer les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n^2 x^n$

8) Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Déterminer le rayon de convergence de f, son domaine de définition et un équivalent lorsque $x \to 1^-$

9) Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$. Montrer que f admet un prolongement C^∞ à $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10) On suppose que $\forall n \quad u_n > 0$ et que la série $\sum u_n$ diverge .Montrer que les séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right) x^n$ ont le même rayon de convergence R et que $R \leq 1$