Intégrales dépendant d'un paramètre

1) Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} \, Arc\tan t \, dt$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$
(effectuer une intégration par parties, puis le changement de variable $u = xt$)

2) On pose $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ .Etudier le domaine de définition et la continuité de F , étudier son sens de variation . Calculer $F(x+1)+F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donner un équivalent de F en 0^+

3) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} \, dt$ .Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, calculer f' et en déduire f

4) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ **.** Calculer $f'(x)$, puis en déduire $f(x)$

5) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, ch(2xt) dt$. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ puis $f(x)$
2) Sans utiliser le résultat de la question précédente, déterminer un développement en série de $f(x)$

6) Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x+t} dt$

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$
2) Déterminer un équivalent de $f(x)$ ($x \to +\infty$)
3) Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $1 - \frac{1}{2}t^2 \le \cos t \le 1$. En déduire un encadrement de f et un équivalent de f en 0^+

7) Exemple de transformée de Laplace

E désigne l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

(*) $\exists A > 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall t \ge A \quad |f(t)| \le C t^n$

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
2) Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Dans la suite de l'exercice, pour $f \in E$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$

3) Montrer que L est une application linéaire de E dans $C^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$

4) Soit $f \in E$, A et C tels que définis dans la propriété (*) . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|L(f)(x)\right| \leq \int_0^A \left|f(t)\right| e^{-xt}\, dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}$$

5) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} L(f)(x) = 0$

6) Soit $f \in E$, montrer que $L(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $L(f)'(x)$ sous forme d'une intégrale.

7) Soit $f \in E$. On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $f' \in E$, déterminer une relation entre $L(f')(x)$ et $L(f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

8) **Fonction Gamma** : On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$

On rappelle que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

1) Calculer $\Gamma(1)$, donner une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0 . (on pourra considérer $x\Gamma(x)$)

3) Etudier les variations de Γ *(* on montrera qu'il existe $\alpha \in \left]1,2\right[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$)

Formule de Gauss pour la fonction Γ

4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = \Gamma(x)$

5) En déduire la formule de Gauss : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

6) Quelle est la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$?

7) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$

9) **X-ENS** Calcul de l'intégrale de Dirichlet

En étudiant la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$, calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$