Variables aléatoires discrètes

1) On dispose d'un dé truqué : il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, la probabilité d'obtenir la face numérotée k est égale à $a\,k$. On lance ce dé et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenue

1) Calculer a . En déduire la loi de X . Puis calculer son espérance et sa variance .
2) On définit la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X}$. Calculer l'espérance de Y

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient des boules blanches en proportion p ($0 < p < 1$) et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On y effectue n tirages successifs avec remise et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues

1) Déterminer la loi de X
2) Calculer $E(X)$ puis $E\big(X(X-1)\big)$ et en déduire $V(X)$

3) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n .On les tire un à un , successivement , avec remise . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts . Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance .

4) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément deux boules dans l'urne . On définit les variables aléatoires X et Y égales respectivement au plus petit et au plus grand des 2 numéros obtenus .

1) Déterminer la loi du couple (X,Y)
2) En déduire les lois marginales de X et de Y
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose , pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $p_{i,j} = a\,i\,j$

1) Déterminer a pour que les $p_{i,j}$ définissent la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires .
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y . Ces variables aléatoires sont elles indépendantes ?

6) Soit $n \geq 2$. On dispose de n urnes U_1 , $\dots U_n$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard puis on tire une boule de cette urne . On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée .

1) Déterminer la loi de X et calculer son espérance .
2) Déterminer la loi du couple (X,Y) . En déduire la loi marginale de Y et calculer son espérance
3) Les VA X et Y sont elles indépendantes ?

7) Le nombre de clients arrivant dans un magasin en une journée est une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

Les clients se répartissent entre les p caisses du magasin de façon indépendante et chaque client choisit sa caisse au hasard . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui passent à la caisse n°1 .

Déterminer la loi du couple (N,X) . En déduire la loi de X

8) On effectue des tirages successifs dans une urne qui contient initialement une boule noire et une boule blanche . a chaque tirage on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule noire . On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule noire et Z la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche

1) Déterminer la loi de Y et la loi de Z
2) Y admet elle une espérance ? Si oui la calculer , même question pour Z

9) On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 . Initialement , il y a deux boules blanches dans U_1 et deux boules noires dans U_2 . a chaque tirage , on prend au hasard une boule dans U_1 , une boule dans U_2 et on les échange . On note pour $n \in \mathbb{N}$ X_n la variable aléatoire égale égale au nombre de boules blanches dans U_1 après le n-ième échange . Ainsi X_n prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. On définit la matrice colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

1) Trouver une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n$
2) Montrer que la suite $\left(E(X_n)\right)_{n\geq 1}$ est constante et déterminer cette constante
3) Déterminer A^n puis U_n
4) En déduire alors la loi de X_n

10) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}$$

1) Déterminer la valeur de a
2) Déterminer la loi de X et la loi de Y . Montrer que X et Y admettent une espérance et la calculer .
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4) On pose $Z = X + Y$. déterminer la loi de Z . Montrer que Z admet une espérance et la calculer

11) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = i, Y = j) = \frac{a(i+j)}{i!j!}$$

1) Déterminer la valeur de a
2) Déterminer la loi de X et la loi de Y .Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
3) Montrer que le couple (X,Y) admet une covariance et la calculer
4) On pose $Z = 2^{X+Y}$. Montrer que Z admet une espérance et la calculer

12) On lance une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ jusqu'à l'obtention de 2 piles. On note alors X le nombre de faces obtenues. Si X=n , on met n+1 boules numérotées dans une urne et on tire une boule au hasard , on note Y le numéro de la boule obtenue.

1) déterminer la loi de X et calculer son espérance
2) Déterminer la loi du couple (X,Y) et en déduire la loi de Y . Calculer l'espérance de Y

3) On définit la variable aléatoire Z=X-Y . Montrer que Y et Z sont indépendantes .

13) On répète de façon indépendante une expérience aléatoire au cours de laquelle un évènement A se réalise , à chaque fois avec la probabilité $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première apparition de l'évènement A et Y celle égale au rang de sa deuxième réalisation

1) Déterminer la loi du couple (X,Y).En déduire les lois marginales de X et de Y .
2) Montrer que X et Y admettent une espérance et une variance et les calculer
3) Montrer que (X,Y) admet une covariance et la calculer .

14) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant la même loi binomiale B(n, ½) . On pose pour $\omega \in \Omega$ $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$

1) Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable
2) Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible

15) Soient X_1 , X_2 ,…, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U U^T$

a. Déterminer la loi de probabilité de $tr(M)$ et $rg(M)$
b. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
c. On suppose $n = 2$. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = {}^tV M V$. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$

16) Soit $p \in]0,1[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p . Soit N une variable aléatoire indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant la loi géométrique de paramètre 1-p . On pose $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

1) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$ $P(S_N = k, N = n)$
2) Calculer $P(S_N = 0)$
3) Déterminer la loi de S_N (on utilisera la formule du binôme négatif $\sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} x^{k-m} = \dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$ avec $x \in]-1,1[$ et $m \in \mathbb{N}$)

17) Caractérisation des lois géométriques comme lois sans mémoire

Si une variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors X suit une loi géométrique de paramètre p ssi $\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ P_{X>n}(X > n+k) = P(X > k)$

Indication : pour le sens indirect, montrer d'abord que $P(X > k) = q^k$ avec $q = P(X > 1)$

18) Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. Les questions sont indépendantes

1) Déterminer $E\left(\frac{1}{X}\right)$
2) Déterminer la loi de $X+Y$
3) Déterminer $P(X = Y)$ et $P(X < Y)$

19) Soit $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(X = n) = \frac{p^{n+1}}{(n+1)c}$

Déterminer c pour que P soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X . Déterminer la fonction génératrice de X , son espérance et sa variance .

20) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $Z = X\,Y$

Déterminer la loi de Z , sa fonction génératrice , espérance et variance

21) Lors d'une compétition de saut en hauteur , un athlète tente de franchir des barres successives numérotées 1 , 2 , …, n, …Il n'a le droit qu'à un seul essai par barre .On suppose les sauts indépendants et que la probabilité de réussite du k-ième saut est $r_k = \frac{1}{k}$

1) On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi .Déterminer la loi de X
2) Calculer l'espérance et la variance de X (on déterminera d'abord la fonction génératrice de X)

22) Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $\forall t \in \mathbb{R} \quad g_X(t) = a e^{1+t^2}$

Déterminer a . Donner la loi de X , son espérance et sa variance .

23) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$ on considère $X_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k)$

24) 300 personnes vont voir un film projeté dans deux salles de cinéma . Chaque salle contient N places $150 \le N \le 300$; Soit X le nombre de personnes allant dans la salle 1. X suit quelle loi ?

Montrer que $P(X - E(X) \ge k) \le P(|X - E(X)| \ge k)$.

Déterminer une valeur de N pour que la probabilité que chaque personne qui souhaite aller dans la salle 1 trouve une place soit supérieure à 0,99 .

25) Convergence en probabilité .

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes et X une variable aléatoire réelle donnée . on suppose que tous les supports de ces variables aléatoires sont inclus dans $\mathbb{Z}$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X ssi $\forall\varepsilon>0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|X_n-X|\geq\varepsilon\right)=0$

1) On pose $M_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$. Montrer que si les variables aléatoires X_n sont indépendantes , admettent une espérance commune μ et une variance commune σ^2 alors la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante .
2) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)=E(X)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n-X)=0$ alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend en probabilité vers X
3) Exemple : On suppose que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $p\in\,]0,1[$. On pose $X_n=\exp\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$. Calculer l'espérance et la variance de X_n . Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante .

26) **X-ENS** On considère une urne contenant 27 boules . sur chacune de ses boules est inscrit un chiffre entre 0 et 3 . Le chiffre k est porté par n_k boules avec $n_0=8$; $n_1=12$; $n_2=6$; $n_3=1$

On effectue N tirages avec remise dans cette urne et on considère la somme S de ces N éléments de $[\![0,3]\!]$ ainsi obtenus . Quelle est la loi de la variable aléatoire S ?