Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

1) Soit $E=\mathbb{R}[X]$ .Pour $(P,Q)\in E^2$, on définit $(P\setminus Q)=\int_0^1 PQ$. Montrer que E est ainsi muni de la structure d'un espace vectoriel préhilbertien . Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(1,X,X^2)$. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

2) Soit $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $(f,g)\in E^2$, on pose $(f\setminus g)=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.

Montrer que cela définit un produit scalaire sur E .Soient f_0 , f_1 , f_2 définie par

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_0(x)=1\quad f_1(x)=x\quad f_2(x)=x^2$. $F=Vect(f_0,f_1)$. Déterminer $d(f_2,F)$.

3) On pose $L(f)=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$ pour une fonction f continue et strictement positive sur $[a,b]$. Montrer que $L(f)\geq(b-a)^2$ et qu'il y a égalité ssi f est constante sur $[a,b]$.

4) Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q)\in E^2$, on définit $(P\setminus Q)=\int_0^{+\infty} e^{-x}P(x)Q(x)dx$

a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E

b) Calculer $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$

c) Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(x^2-ax-b\right)^2dx$

5) Soit $E=C^2([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi:(f,g)\mapsto\int_0^1\left(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\right)dt$

a) Montrer que φ est un produit scalaire

b) Soient $F=\{f\in E\setminus f(0)=f(1)=0\}$ et $G=\{f\in E\setminus f=f''\}$

Montrer que $E=F\overset{\perp}{\oplus}G$. Soit $f\in E$. Déterminer le projeté orthogonal de f sur G

c) Déterminer $d(f,G)$ avec $f:t\mapsto t$

6) Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien E . Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x\in E\quad \|p(x)\|\leq\|x\|$

7) Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1,\dots,e_n)$ un système de vecteurs unitaires de E tels que :

$\forall x\in E\quad \|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}(x\setminus e_k)^2$ .Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

8) Dans $\mathbb{R}^3$, soit un plan. P: $2x_1+x_2-2x_3=0$ et D= $P^\perp$

Ecrire les matrices des projections orthogonales sur P et sur D et les matrices des symétries orthogonales par rapport à D et P

9) Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ tel que $\forall x \in E \quad (f(x) \backslash x) = 0$

1) Montrer que $\forall x, y \in E \quad (f(x) \backslash y) = -(f(y) \backslash x)$
2) Montrer que $Ker\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$
3) Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée est antisymétrique

10) Dans E un espace euclidien , soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

Soit $P = Mat_B(u_1, \ldots, u_n)$, montrer que $P^T P = \left((u_i \backslash u_j)\right)_{1 \le i, j \le n}$

En déduire $\det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n)^2 = \det\left[(u_i \backslash u_j)\right]_{1 \le i, j \le n}$

11) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad Ker(A^T A) = Ker(A)$ en déduire $rg(A^T A) = rg(A)$

12) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad |tr(A)| \le \sqrt{n}\, \|A\|$ (avec $\| \; \|$ la norme associée au produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$). Etudier le cas d'égalité.

13) **X-ENS** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i, j \le n}$ une matrice symétrique définie positive .

1) Décomposition de Choleski : Soit $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \mapsto X^T A Y$ .Montrer que cela définit un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire qu'il existe P une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = P^T P$ (on orthonormalisera la base canonique)

2) Montrer que $\det A \le \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (inégalité d'Hadamard)