Isométries et endomorphismes auto-adjoints

1) Soit $u \in O(E)$. Soit $F = Ker(u - Id)$ et $G = \mathrm{Im}(u - Id)$ .Montrer que $F = G^{\perp}$.

2) Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathrm{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormée

Soit $A = Mat_{\mathrm{B}}(f)$ Quelle est la nature de f et ses éléments caractéristiques dans les cas suivants

1) $A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $A_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ 4) $f = f_1 \circ f_2$; $g = f_2 \circ f_3$;

3) Dans E un espace euclidien , soit $u \in E$ u unitaire , $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\forall x \in E$ $f_\lambda(x) = x + \lambda(x \setminus u)u$

Montrer que f_λ est un endomorphisme auto-adjoint

A quelle condition sur λ , f_λ est elle une isométrie ? Caractériser alors les applications obtenues

4) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On suppose $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $(A - \lambda I_n)^2 = 0$. Montrer que $A = I_n$ ou $A = -I_n$

5) Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

On pose $\varphi : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AP$ et $\psi : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}AP$.

a) Montrer que si P est orthogonale alors φ et ψ sont des isométries.

b) Montrer que si φ est une isométrie alors P est orthogonale . Montrer que cette dernière implication est fausse pour ψ

6) On considère E l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n muni du produit scalaire $(P \setminus Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ On pose $\forall P \in E$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt$

Montrer que u est un endomorphisme auto-adjoint de E et calculer sa trace (on admet que l'on peut permuter deux intégrales si les fonctions mises en jeu sont continues)

7) Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} \right| \le n$. Etudier le cas d'égalité .

8) Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un système de valeurs propres de A . Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

9) 1) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$

Montrer que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ $\lambda_1 \|X\|^2 \le X^T M X \le \lambda_n \|X\|^2$

2) Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E et $H_u = \{x \in E \setminus (u(x) \setminus x) = 1\}$

a) Appliquer le résultat de la première question à u

b) Montrer qu'il existe un vecteur unitaire appartenant à H_u ssi $1 \in [\lambda_1, \lambda_n]$

indication : considérer e_1 vecteur propre unitaire associé à λ_1 , e_n vecteur propre unitaire associé à λ_n , poser $e_\theta = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_n$, $f(\theta) = (u(e_\theta) \setminus e_\theta)$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

10) 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Si on suppose que A est inversible , montrer que $A^T A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) Réciproquement , montrer que pour toute matrice $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^T A$ et que A est inversible si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

11) 1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = R^2$ (et si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$)

2) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$ et $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = R^2$. Montrer que AB est semblable à RBR . En déduire que AB est diagonalisable .

3) Soient A et C dans $S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $Tr(AC) \geq 0$

12) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ Montrer que $\left|\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}\right| \leq n\sqrt{rgA}$

13) Montrer que si A est symétrique positive et U est orthogonale alors $Tr(AU) \leq TrA$

(considérer les endomorphismes associés et une bon de vecteurs propres de A)

14) Soit E un espace euclidien muni d'une base $(u_1, \ldots, u_n)$ et $f : x \in E \mapsto \sum_{i=1}^{n} (u_i \setminus x) u_i$

a) Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint de E

b) Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives .

c) Montrer qu'il existe $g \in S(E)$ telle que $g^2 = f^{-1}$

d) Montrer que $(g(u_1), \ldots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E

(On pourra considérer e_j tel que $u_j = f(e_j)$ et montrer que $(u_i \setminus e_j) = \delta_{i,j}$)

***15)* Rayon spectral**

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(A) = \underset{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)}{Max} |\lambda|$. $\rho(A)$ s'appelle le rayon spectral de A . On pose pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ $\|X\| = \sqrt{X^T X}$ et pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \sup\limits_{\substack{X \neq 0 \\ X \in M_{n,1}(\mathbb{R})}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$. On admet que $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $N(A)$ existe.

1) Montrer que N définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (appelée norme subordonnée à $\| \ \|$)

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique , montrer que $N(A) = \rho(A)$.