Espaces vectoriels normés (2ième partie)

1) Soit E un espace vectoriel normé . Montrer que l'adhérence d'un sous espace vectoriel de E est un sous espace vectoriel de E

2) Soit $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus x^2+y^2<x^3+y^3\right\}$. Montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}^2$

3) Soit U un ouvert et $\lambda>0$. On pose $\lambda U=\left\{\lambda x \setminus x\in U\right\}$; Montrer que $\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}\lambda U$ est ouvert

4) Soient A et B deux parties d'un evn .Montrer que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;
$\overset{\circ}{\overline{A\cap B}}=\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$; $\overset{\circ}{\overline{A\cup B}}\supset\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$

5) Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

6) Montrer que $GL_n(K)$ est ouvert dans $M_n(K)$

7) Dans un espace vectoriel normé , on définit pour A et B des parties de E
$A+B=\left\{a+b\setminus a\in A, b\in B\right\}$.

1) Montrer que A ouvert $\Rightarrow$ $A+B$ ouvert

2) Considérons $A=\left\{-n\setminus n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et $B=\left\{n+\dfrac{1}{n}\setminus n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2\right\}$ Montrer que A et B sont fermés mais que $A+B$ n'est pas fermé

8) Dans $E=C([0,1],\mathbb{R})$, on considère la norme $\| \ \|_\infty$. On pose $A=\left\{f\in E\setminus f(0)=0 \ et \ \int_0^1 f\geq 0\right\}$

Montrer que A est fermé dans E pour la norme $\| \ \|_\infty$.

9) Montrer que $C_E\left(\overset{o}{A}\right)=\overline{C_E(A)}$

10) Dans $E=C([0,1],\mathbb{R})$, on considère la norme $\| \ \|_\infty$.

Soit φ l'endomorphisme de E défini par : $\forall f\in E \ \ \forall x\in[0,1] \ \ \varphi(f)(x)=\int_0^x t\,f(t)\,dt$

Montrer que φ est continue sur E pour la norme $\| \ \|_\infty$ et déterminer $|||\varphi|||=\sup\limits_{f\in E\setminus\{0\}}\dfrac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$

11) Soit $E=C([0,1],\mathbb{R})$

1) Montrer que l'application qui à $f\in E$ associe $\|f\|_1=\int_0^1|f|$ est une norme sur E

2) Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto f(0)$ n'est pas continue pour la norme $\| \ \|_1$

12) Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $N(P) = \sum_{k=0}^{\deg P} \dfrac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!}$

1) Montrer que N est une norme

2) L'application $\varphi : P \mapsto P'$ est elle continue pour cette norme ? (on pourra considérer $P_n = \dfrac{X^n}{n}$)

3) Montrer que l'application $\psi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$ est continue pour cette norme (k fixé)

13) L'application $rg : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto rg(A)$ est elle continue ?

14) Soit E un K-espace vectoriel normé de dimension finie , A un compact de E et f une application de A dans A telle que $\forall (x,y) \in A^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

Montrer que f admet un unique point fixe sur A (on pourra considérer l'application $x \mapsto \|f(x) - x\|$)

15) Etudier la continuité des fonctions suivantes (sur leur domaine de définition)

1) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

2) $f(x,y) = \dfrac{(1 + x^2 + y^2)}{y} \sin y$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 1$

3) $f(x,y) = \dfrac{x y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

Pourrait on prolonger f par continuité en $(0,0)$? (en donnant une autre valeur à $f(0,0)$)

4) $f(x,y,z) = \dfrac{x y z}{x^2 + y^2 + z^2}$ si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ et $f(0,0,0) = 0$

16) Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin(x + y)}{\ln(1 + x + y)}$, déterminer l'existence d'une limite en un point $X_0 = (x_0, -x_0)$

17) Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $T \in L(E, \mathbb{R})$ telle que $\forall f \in E \quad f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$

Montrer que T est croissante , lipschitzienne et continue pour $\| \ \|_\infty$

18) **X-ENS** Montrer que l'ensemble D_n des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$