PC* Devoir Surveillé N°1 durée 3h30

On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ quand $n \to +\infty$

Problème 1 : Approximations de ln2 par des séries

1) Soit $x \in \left]-1,1\right[$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge.

2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge

Dans la suite du problème, on admet que $\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

3) Montrer que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,2^k}$

4) Pour $x \in \left]-1,1\right[$, écrire $\ln(1-x)$ sous forme de série

5) Montrer que $\forall x \in \left]-1,1\right[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$

6) Constante d'Euler :

On pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Déterminer un équivalent de $w_{n+1} - w_n$ quand $n \to +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum w_{n+1} - w_n$ et la nature de la suite (w_n). On pose $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$

7) Montrer que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (on séparera les termes pairs et impairs dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$)

8) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,on pose $a_n = \dfrac{(2n)!}{n\,2^{2n+1}(n!)^2}$. Déterminer un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$. En déduire que $\sum a_n$ converge.

Dans la suite du problème, on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{\pi^2}{4}\ln 2$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $U_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$, $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\,2^k}$, $S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$, $V_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k}$ (restes de séries convergentes)

9) Calculer U_n . Que vaut $U_{k-1}-U_k$?

10) En déduire que $R_n=\frac{U_n}{n+1}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}$

11) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}=o(R_n)$ (écrire $\frac{U_k}{k(k+1)}=o\left(\frac{1}{k\,2^k}\right)$ à l 'aide de la définition avec les ε)

12) En déduire que $R_n\sim\frac{1}{n\,2^n}$

13) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \forall t\in[0,1]\quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k=\frac{1}{1+t}-(-1)^n\frac{t^n}{1+t}$ et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad S_n=(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$

14) Montrer que $S_n\sim\frac{(-1)^n}{2n}$ (on fera une intégration par partie sur l'expression intégrale de S_n)

15) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geq N\quad (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}\leq a_k\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}$ (on pourra utiliser l'équivalent de a_k obtenu à la question 8))

16) Encadrer $\frac{1}{k^{3/2}}$ par des intégrales et en déduire $\forall n\geq N\quad \forall p\geq n+1\quad (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^{3/2}}\leq\sum_{k=n+1}^{p}a_k\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_n^p\frac{dt}{t^{3/2}}$

17) Justifier que l'on peut passer à la limite quand $p\to+\infty$ dans l'expression précédente, en déduire un encadrement de T_n . En conclure que $T_n\sim\frac{1}{\sqrt{\pi\,n}}$

18) Montrer que $V_n\sim\frac{1}{n^2\,2^n}$ (remplacer $\frac{1}{2^k}$ par $U_{k-1}-U_k$ dans l'expression de V_n)

19) Parmi les 4 séries étudiées dans ce problème qui convergent vers $\ln 2$, laquelle converge le plus rapidement et laquelle converge le moins rapidement ? (réponse à justifier)

Problème 2 : Fonction définie par une intégrale

Les 5/2 ne sont pas autorisés à utiliser les théorèmes sur les intégrales à paramètre ni aucune propriété sur les intégrales impropres.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^x}$. On remarquera que cette expression existe bien pour tout x réel puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x}$ est continue sur $[0,1]$

1) Calculer $F(0)$ et $F(1)$

2) Par intégration par parties, déterminer une relation entre $F(x)$ et $\int_0^1 \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{x+1}} dt$. En déduire une relation entre $F(x)$ et $F(x+1)$. Montrer que l'on peut ainsi calculer $F(n)$ et $F(-n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on ne demande pas le calcul effectif). Calculer $F(2)$ et $F(-1)$

3) Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}$

4) Lorsque $x < 0$, déterminer le sens de variation de $t \mapsto \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x}$ sur $[0,1]$, puis exprimer sa valeur en $t = \frac{1}{2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$

5) Montrer que $\forall t \in [0,1] \quad \frac{1}{2}t^2 \leq \ln\left(1+t^2\right)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad F(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$

6) On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

a) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[\quad \int_1^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq -2e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}$. En déduire que φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$

b) Déterminer une relation entre $\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$ et $\varphi\left(\sqrt{x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

7) Etude de la dérivabilité de F

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -\int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^x} dt$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|e^x - 1 - x\right| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$ (on pourra appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à la fonction exponentielle)

b) Montrer que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall h \in [-1,1] \quad \left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\,g(x_0)\right| \leq h^2 \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^2}{\left(1+t^2\right)^{x_0}} dt$$

c) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $F'(x)$. Retrouver le résultat de la question 3).

Calculer $F'(0)$

8) Suite récurrente : Posons $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = F(u_n)$

a) Montrer que F admet un unique point fixe l sur $\mathbb{R}$ et que $l \in [0,1]$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0,1]$

c) Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad |F'(x)| \leq \ln 2$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - l| \leq (\ln 2)|u_n - l|$.

d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Problème 3 : Fonction définie par une intégrale

On pose $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(t) = \dfrac{1}{t + \sin t}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin t}$

1) Montrer que $\sin t + t = 0 \iff t = 0$

2) En déduire f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de f

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée. Exprimer $f'(x)$ sous forme factorisée. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$

4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}$

5) Montrer que $\exists m \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \geq m \quad t + \sin t \geq \dfrac{t}{2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

6) On pose $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad g(t) = \dfrac{1}{t + \sin t} - \dfrac{1}{2t}$. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 et le déterminer. En particulier, g est prolongeable par continuité en 0 .

7) En déduire que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et le déterminer (on fera intervenir une primitive de g). Montrer que f est prolongeable en une fonction dérivable en 0 . Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$. Déterminer la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0 .

8) Déterminer un équivalent de $f'(x)$ en 0 et en déduire que f est 2 fois dérivable en 0. Expliciter $f''(0)$