PC* Devoir Surveillé N°3 durée 2h

Exercice 1 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$ et $A \neq 0$. .Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $A = Mat_B(f)$ avec B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a donc $f^3 = -f$ et $f \neq 0$. On pose $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $f^2 \neq -Id_E$ (on pourra utiliser le déterminant)

2) Montrer que f est non injective (on pourra procéder par l'absurde)

3) On pose $F = Ker\left(f^2 + Id_E\right)$. Montrer que $E = Kerf \oplus F$ et montrer que $F = \operatorname{Im} f$.

4) Montrer que F est stable par f .On appelle f_F l'endomorphisme induit par f sur F . Montrer que ${f_F}^2 = -Id_F$. En déduire que $\dim F \neq 1$. En déduire que $\dim F = 2$. Que vaut alors $\dim Kerf$?

5) Soit u_1 un vecteur non nul de $Kerf$, u_2 un vecteur non nul de F et $u_3 = f(u_2)$.

Que vaut $f(u_3)$? Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ .En déduire que A et A' sont semblables.

6) Etude d'un exemple :

On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, on donne $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = -A$ (on ne demande pas de le vérifier).Déterminer une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$ (on ne demande pas de calculer P^{-1})

7) On revient au cas général avec une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $A^3 = -A$ et $A \neq 0$.

Soit P une matrice inversible telle que $A' = P^{-1}AP$

On pose $C(A') = \{N \in M_3(\mathbb{R}), A'N = NA'\}$ et $C(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

a) Déterminer toutes les matrices appartenant à $C(A')$. En déduire une base de $C(A')$.

b) Montrer que (I_3, A', A'^2) est une base de $C(A')$.

c) Montrer que $M \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(A')$. En déduire que (I_3, A, A^2) est une base de $C(A)$.

Exercice 2 :

On admettra que si A ***et*** B sont dans $M_n(K)$ alors l'application $x \in K \mapsto \det(xA + B)$ est polynômiale.

1) Soient A , B , C , D des éléments de $M_n(K)$

On suppose que D est inversible et que $DC = CD$ **.** Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

indication : exprimer $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right)$ de deux façons

2) Supposons encore que $DC = CD$ et $D \in M_n(K)$ quelconque (pas forcément inversible)

a) Montrer qu'il existe un nombre fini de valeurs de $x \in K$ tels que la matrice $D - xI_n$ soit non inversible. On pose $x_1, \ldots, x_p$ ces valeurs. Donc $\forall x \in K \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ $D - xI_n$ est inversible

b) Montrer que $\forall x \in K \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI_n \end{pmatrix} = \det(AD - BC - xA)$

c) Montrer que la relation de la question b) est valable $\forall x \in K$.

d) En déduire $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

3) Application

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 2A_n & A_n \\ A_n & 2A_n \end{pmatrix}$

a) Quelle est la taille de la matrice A_n ? Déterminer $\det A_{n+1}$ en fonction de $\det A_n$

b) Déterminer $\det A_n$ en fonction de n

Exercice 3 :

Soit $N \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{N}$ $N^k = 0$. On pose $A = I_3 + N$

Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $N = Mat_B(u)$ avec B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Supposons $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$ (N est nilpotente d'indice 3)

a) Soit $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrer que $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que N est semblable à $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Soit $M = N^2 - N$. Montrer que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. En déduire que M est semblable à N

c) En remarquant que $(A - I_3)^3 = 0$, montrer que A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction de I_3, A, A^2 puis en fonction de I_3, N, N^2. En déduire que A^{-1} est semblable à A

2) Supposons $N^2 = 0$ et $N \neq 0$ (N est nilpotente d'indice 2)

a) Montrer que $\operatorname{Im} u \subset Keru$. En déduire la dimension de $\operatorname{Im} u$ et de $Keru$

b) Soit $e_3' \notin Keru$. On pose $e_1' = u(e_3')$ et on considère $e_2' \in Keru$ non colinéaire à e_1'

Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que N est semblable à $N'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Montrer que $-N$ est semblable à N .

d) Montrer que A est inversible et que A^{-1} est semblable à A