

<b>PC* Devoir Surveillé N°6 durée 4h Niveau Centrale/Mines</b>
--

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev: Si  $X^2$  est d'espérance finie on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

On utilise la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma$  (partie I) pour calculer, en partie II, une intégrale dépendant d'un paramètre. En partie III, en liaison avec des variables aléatoires suivant une loi de Poisson, on détermine l'équivalent, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de sommes dépendant d'un paramètre entier  $n$ . Les trois parties sont largement indépendantes.

## I Autour de la fonction Gamma d'Euler

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose, lorsque cela a un sens,  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

**I.A -**

**I.A.1)** Quel est le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de la fonction  $\Gamma$  ?

**I.A.2)** Pour tout  $x \in \mathcal{D}$ , exprimer  $\Gamma(x+1)$  en fonction de  $x$  et de  $\Gamma(x)$ .

En déduire, pour tout  $x \in \mathcal{D}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , une expression de  $\Gamma(x+n)$  en fonction de  $x$ ,  $n$  et  $\Gamma(x)$ , ainsi que la valeur de  $\Gamma(n)$  pour tout  $n \geq 1$ .

**I.A.3)** Montrer l'existence des deux intégrales  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-t^4} dt$  et les exprimer à l'aide de  $\Gamma$ .

**I.B -**

**I.B.1)** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Montrer que, pour tout  $t > 0$  et tout  $x \in [a, b]$ ,

$$t^x \leq \max(t^a, t^b) \leq t^a + t^b$$

**I.B.2)** Montrer que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathcal{D}$ . Exprimer  $\Gamma^{(k)}(x)$ , dérivée  $k$ -ième de  $\Gamma$  au point  $x$ , sous forme d'une intégrale.

**I.C -**

**I.C.1)** Montrer que  $\Gamma'$  s'annule en un unique réel  $\xi$  dont on déterminera la partie entière.

**I.C.2)** En déduire les variations de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{D}$ . Préciser en particulier les limites de  $\Gamma$  en 0 et en  $+\infty$ . Préciser également les limites de  $\Gamma'$  en 0 et en  $+\infty$ . Esquisser le graphe de  $\Gamma$ .

## II Une transformée de Fourier

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-3/4} e^{itx} dt$ , où  $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\pi/2$ .

**II.A -** Montrer que la fonction  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $k$  un entier naturel non nul et soit  $x$  un réel. Donner une expression intégrale de  $F^{(k)}(x)$ , dérivée  $k$ -ième de  $F$  en  $x$ . Préciser  $F(0)$ .

**II.B -**

**II.B.1)** Montrer qu'au voisinage de  $x = 0$ , la fonction  $F$  peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!} \quad (S)$$

où  $c_n$  est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera  $c_n$  en fonction de  $n$  et de  $c_0$ .

Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de (S) ?

II.B.2) On admet que  $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{(x-1/2)} e^{-x}$ .

Étudier si la série du second membre de (S) converge absolument lorsque  $|x| = R$ .

II.B.3) Soit  $R(x)$  la partie réelle et  $I(x)$  la partie imaginaire de  $F(x)$ .

Montrer que le développement en série entière de  $F$  permet d'obtenir son développement limité à l'ordre 3 en 0

Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de  $R(x)$  à l'ordre 3 et de  $I(x)$  à l'ordre 4.

II.C -

II.C.1) Prouver que  $F$  vérifie sur  $\mathbb{R}$  une équation différentielle de la forme  $F' + AF = 0$ , où  $A$  est une fonction à préciser.

II.C.2) En déduire une expression de  $F(x)$ .

On pourra commencer par dériver la fonction  $x \mapsto -\frac{1}{8} \ln(1+x^2) + \frac{i}{4} \arctan x$ .

III Autour de la loi de Poisson

Dans cette partie,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

On rappelle qu'une variable aléatoire  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda$  si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$ ,  $P(X \in A)$  désigne la probabilité de l'événement  $X^{-1}(A)$ .

Soit  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

III.A.1) ) Montrer que  $E(X) = \lambda$  et  $V(X) = \lambda$

III.A.2) )

III.A.3) Soit  $\mu$  un réel strictement positif. Soit  $Y$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\mu)$  et telle que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes. Déterminer la loi de  $X + Y$ .

III.B - Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ . On rappelle que, quels que soient les entiers  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$  et les intervalles  $I_1, I_2, \dots, I_k$  de  $\mathbb{R}$

$$P(X_{i_1} \in I_1, X_{i_2} \in I_2, \dots, X_{i_k} \in I_k) = \prod_{j=1}^{j=k} P(X_{i_j} \in I_j)$$

III.B.1) Pour tout entier  $n \geq 1$ , déterminer la loi de  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

III.B.2) Déterminer l'espérance et l'écart type des variables aléatoires  $S_n$  et  $T_n = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ .

III.B.3) Montrer que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un réel  $c(\epsilon)$  tel que, si  $c \geq c(\epsilon)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P(|T_n| \geq c) \leq \epsilon$ .

III.C - Dans cette sous-partie, on fixe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$  tel que  $a + \sqrt{n\lambda} > 0$ , on pose

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leq k \leq n\lambda + b\sqrt{n\lambda}\}$$

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on pose  $x_{k,n} = \frac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ .

On considère enfin la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

III.C.1) Montrer qu'il existe un réel  $M > 0$  tel que  $f$  soit une fonction  $M$ -lipschitzienne.

C'est-à-dire  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

III.C.2)

a) Montrer que, si  $x, h \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , alors  $|hf(x) - \int_x^{x+h} f(t) dt| \leq M \frac{h^2}{2}$ .

b) En déduire, lorsque  $I_n$  est non vide, une majoration de

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t) dt \right|$$

où  $p$  est le plus petit élément de  $I_n$  et  $q$  est le plus grand.

c) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(x) dx$$

III.C.3) Pour tout  $k \in I_n$ , on note  $y_{k,n} = \left(1 - \frac{x_{k,n}}{k} \sqrt{n\lambda}\right)^k \exp(x_{k,n} \sqrt{n\lambda})$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Démontrer l'existence d'un entier  $N(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $n \geq N(\varepsilon)$  et tout  $k \in I_n$ , les inégalités suivantes soient satisfaites :

a)  $\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n} \leq e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n}$  ;

On utilisera la formule de Stirling

b)  $(1-\varepsilon)f(x_{k,n}) \leq y_{k,n} \leq (1+\varepsilon)f(x_{k,n})$ .

III.C.4)

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) dx$

III.C.5) Montrer  $P(a \leq T_n \leq b) = \sum_{k \in I_n} P(S_n = k)$ , où  $S_n$  et  $T_n$  sont définies en III.B.

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq T_n \leq b)$

On admettra pour la suite du problème qu'on a de même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq T_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x) dx$

III.C.6) Déterminer les limites, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de  $P(T_n = a)$ ,  $P(T_n > a)$  et  $P(T_n \leq b)$

III.D.1) Déduire de la question III.C.6) la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

III.D.2) Déterminer un équivalent, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , de

$$A_n = \sum_{k=0}^{[n\lambda]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{[n\lambda]}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

où  $[t]$  désigne la partie entière du réel  $t$ .

On interprétera  $e^{-n\lambda} A_n$  comme la probabilité d'un événement lié à  $S_n$  et donc à  $T_n$ .

III.D.3) Pour  $\lambda \neq 1$ , on note  $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!}$  et  $D_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ .

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} C_n$  si  $\lambda < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} D_n$  si  $\lambda > 1$ .

III.E - On suppose  $\lambda < 1$ .

III.E.1) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( (n\lambda)^{-n} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^t dt \right)$ .

III.E.2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, en déduire un équivalent de  $D_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

III.F - Si  $\lambda > 1$ , déterminer un équivalent de  $C_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Considérer l'intégrale  $\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^0 (r-t)^n e^t dt$  et choisir convenablement le réel  $r$ .