PC* Devoir Surveillé N°6 Niveau X-ENS durée 4h

On définit, pour tout le problème, la fonction Gaussienne $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

On rappelle l'inégalité de Markov : Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'espérance finie on a : $\forall a > 0 \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

I

1) **a.** Pour $t > 0$ on pose

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\, dx\right)^2 \qquad B(t) = -\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx.$$

montrer que les fonctions A et B ont la même dérivée.

b. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, dx = 1.$$

2) Etant donnée une fonction g bornée continue sur $\mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = g(x).$$

3) Etant donnée une fonction f bornée continue sur $\mathbb{R}$, et posant $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\, dx$, montrer que la fonction donnée par

$$\varphi(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f \rangle)\, dy$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et est solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = f(x) - \langle f \rangle.$$

Montrer aussi que

$$\varphi(x) = -e^{x^2/2} \int_{x}^{+\infty} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f \rangle)\, dy.$$

4) Montrer que pour tous nombres réels x, y, on a

$$e^{-y^2/2} \leqslant e^{-x^2/2} e^{-x(y-x)}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C_0 \|f\|_\infty}{1 + |x|},$$

avec $C_0 \leqslant \max(4, 2\sqrt{2\pi e})$. Pour ce faire, on distinguera les cas $x \geqslant 1, x \leqslant -1, -1 \leqslant x \leqslant 1$. En déduire que φ' est bornée sur $\mathbb{R}$.

5) On suppose dans tout le reste de cette partie en outre que f est de classe C^1 avec f' bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que

$$\varphi(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-s^2/2} e^{-sx}(f(x+s) - \langle f \rangle)\, ds.$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(1 + |x|)|\varphi'(x)| \leqslant C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où C est une constante indépendante de f. En définissant C_1 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

6) Justifier que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\varphi''(x)| \leqslant C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où C est une constante indépendante de f. En définissant C_2 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

II

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles positives continues par morceaux.

1) En utilisant une intégration par parties que l'on justifiera, montrer que pour toute fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que φ et φ' soient bornées sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)(\varphi'(x) - x\varphi(x))\,dx = 0.$$

2) On suppose pour cette question que la suite (g_n) est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx = 1$ et que pour toute fonction h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que h et h' soient bornées, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,dx = 0.$$

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour toute fonction f continue bornée, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)\,dx.$$

III

Dans toute cette partie et la suivante, on suppose que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, sur un espace de probabilité. On suppose que les X_i sont **indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante** M.

c'est-à-dire $\forall i \in \mathbb{N}\ |X_i| \leq M$ (ou encore $X_i(\Omega) \subset [-M, M]$)

On pose, pour tout n, $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. On notera P la probabilité et E l'espérance.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$, et $\langle f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,dx$. Soit φ définie à partir de f comme à la question I. 3).

1) Montrer qu'une variable aléatoire discrète bornée admet une espérance

2) Vérifier que

$$E(\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)) = E(f(Z_n) - \langle f\rangle).$$

3) Pour i entier dans $[1, n]$, on définit $Z_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_{i-1} + X_{i+1} + \cdots + X_n) = Z_n - \frac{1}{\sqrt{n}}X_i$. En utilisant les résultats de la partie I, montrer que

$$\left|X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right| \leqslant \frac{C_2}{2}\frac{|X_i|^3}{n}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

(on pourra appliquer la formule de Taylor reste intégral à φ)

4) En déduire que

$$\left|E(Z_n\varphi(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\varphi'(Z_{n,i}))\right| \leqslant \frac{C_2 M}{2\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

5) En utilisant le même type d'arguments, montrer que

$$\left|E(\varphi'(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\varphi'(Z_{n,i}))\right| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

(On admettra que $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie)

6) En déduire que

$$\left|E(f(Z_n)) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,dx\right| \leqslant \frac{C_2(1 + \frac{1}{2}M)}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

7) Soit $a \in \mathbb{R}$, on note I_a la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\infty, a]$ c'est à dire $I_a(x) = 1$ si $x \in]-\infty, a]$ et $I_a(x) = 0$ sinon

Soit $\varepsilon > 0$, déterminer une expression de la fonction f de classe C^1 égale à 1 sur $]-\infty, a-\varepsilon]$, égale à 0 sur $[a, +\infty[$ et polynômiale de degré 3 sur $[a-\varepsilon, a]$. Montrer que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$

On admet qu'il existe de même une fonction g de classe C^1 égale à 1 sur $]-\infty, a]$, égale à 0 sur $[a+\varepsilon, +\infty[$ et polynômiale de degré 3 sur $[a, a+\varepsilon]$ (on ne demande pas son expression) et telle que $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty = \|f'\|_\infty$

Justifier que $f \leq I_a \leq g$ puis que $E(f(Z_n)) \leq P(Z_n \leq a) \leq E(g(Z_n))$

Montrer alors que $P(Z_n \leq a) = \int_{-\infty}^{a} G(x)dx + O(n^{-1/4})$ lorsque $n \to +\infty$

IV

On garde les mêmes hypothèses qu'à la partie précédente, à savoir que (X_i) forme une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante M.

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n).$$

1) a) Montrer que $\forall \lambda \in [0,1] \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} \leq \lambda e^{x_1} + (1-\lambda)e^{x_2}$ (*)

Soit $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, et soit $h : x \mapsto e^{tx}$.

En appliquant l'inégalité (*), obtenir une majoration de h sur $[-M, M]$ par une fonction affine

En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+ \ \forall i \in \mathbb{N} \quad E(e^{tX_i}) \leq \frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM})$

b. Montrer que pour $t \geqslant 0$ et $M \geq 0$, on a

$$\frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM}) \leqslant e^{\frac{1}{2}t^2M^2}.$$

2) En déduire que pour tout $\delta > 0$,

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \delta\right) \leqslant e^{-\frac{n\delta^2}{2M^2}}.$$

3) Comparer ce résultat à celui de la question III. 7): quelle est la meilleure estimation quand n tend vers l'infini ?

4)
a. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}. \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Montrer que si $|X| \leq M$ on a $f(X) \leqslant f(M)$.

b. En utilisant les hypothèses sur X_i et l'inégalité $1 + x \leqslant e^x$, en déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et tout i, on a

$$E(e^{tX_i}) \leqslant exp\left(\frac{1}{M^2}(e^{tM} - 1 - tM)\right).$$

En déduire l'amélioration suivante du résultat précédent:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \delta\right) \leqslant e^{-\frac{n}{M^2}\Phi(M\delta)}, \quad \text{où } \Phi(x) = (1+x)\log(1+x) - x.$$