PC* Devoir Maison N°3

Soit $a>0$, on pose $I=[-a,a]$, $E=C^{\infty}(I,\mathbb{R})$, Pl l' ensemble des fonctions polynômiales de E , Pl_n l'ensemble des fonctions polynômiales de E de degré inférieur ou égal à n

Pour $f\in E$ on pose

$$\forall x\in I\quad u(f)(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x\sin t)\,dt \quad \text{et} \quad \forall x\in I\quad v(f)(x)=f(0)+x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin t)\,dt$$

On admet alors que $u(f)$ et $v(f)$ sont C^{∞} sur I

On admet également que $\forall x\in I\quad \forall k\in\mathbb{N}\quad (u(f))^{(k)}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin t)^k f^{(k)}(x\sin t)\,dt$

Pour $f\in E$, on pose $\|f\|_{\infty}=\underset{t\in I}{Sup}|f(t)|$ et $N(f)=\|f\|_{\infty}+\|f'\|_{\infty}$

On pose aussi $\forall n\in\mathbb{N}\quad W_n=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\,dt$ (intégrale de Wallis)

<u>On admet également le théorème de Weierstrass :</u>

Si f est une application continue sur un intervalle fermé borné $[\alpha,\beta]$ alors il existe une suite de fonctions polynômiales $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[\alpha,\beta]$

1) Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $W_n\to 0\quad (n\to+\infty)$ (on ne demande pas de calculer W_n)

2) Montrer que u et v sont des endomorphismes de E

3) Montrer que N est une norme sur E . Les normes $\|\ \|_{\infty}$ et N sont-elles équivalentes ?

4) Montrer que $\forall f\in E\quad \|u(f)\|_{\infty}\le\|f\|_{\infty}$ et $N(u(f))\le N(f)$. Montrer qu'il existe une constante C que l'on déterminera telle que $\forall f\in E\quad \|v(f)\|_{\infty}\le C\,N(f)$

Expliquer pourquoi $\forall (f,g)\in E^2\quad \|u(f)-u(g)\|_{\infty}\le\|f-g\|_{\infty}$; $N(u(f)-u(g))\le N(f-g)$;. $\|v(f)-v(g)\|_{\infty}\le C\,N(f-g)$

5) Pour $k\in\mathbb{N}$ on pose $\forall x\in I\quad p_k(x)=x^k$, montrer que p_k est un vecteur propre de u et aussi un vecteur propre de v (pour quelles valeurs propres associées ?)

En déduire que Pl_n et Pl sont stables par u et par v

6) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u\circ v(p_n)=p_n$ et $v\circ u(p_n)=p_n$.

En déduire $\forall f \in Pl \quad u \circ v(f) = f$ et $v \circ u(f) = f$

7) Soit $f \in E$, on veut montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Pl telle que $N(f_n - f) \to 0 \quad (n \to +\infty)$

On considère donc $f \in E$. Grâce au théorème de Weierstrass, on dispose d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Pl qui converge uniformément vers f' sur I. On considère f_n l'unique primitive de g_n qui vérifie $f_n(0) = f(0)$ .On a donc $f_n' = g_n$ et $f_n \in Pl$

Justifier que $\forall x \in I \quad f_n(x) - f(x) = \int_0^x \left(f_n'(t) - f'(t)\right)dt$

En déduire une majoration de $\left|f_n(x) - f(x)\right|$ en fonction de $\left\|f_n' - f'\right\|_\infty$

En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I et en déduire que $N(f_n - f) \to 0 \quad (n \to +\infty)$

8) Soit $f \in E$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Pl construite à la question précédente.

A l'aide de la question 4, montrer que $\left\|u \circ v(f_n) - u \circ v(f)\right\|_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty)$, en déduire que $u \circ v(f) = f$

Montrer également que $\left\|v \circ u(f_n) - v \circ u(f)\right\|_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty)$ et en déduire que $v \circ u(f) = f$

En déduire que u et v sont bijectives et que $u^{-1} = v$. Est-ce que 0 est valeur propre de u ? de v ?

9) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ Montrer que $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} \in Sp(v)$

10) Soit u_n l'endomorphisme induit par u sur Pl_n . Montrer que $Sp(u_n) = \left\{\dfrac{2W_k}{\pi}, k \in [\![0,n]\!]\right\}$ et déterminer les sous espaces propres associés.

11) Soit f un vecteur propre de u et λ la valeur propre associée.

a) Montrer que $\forall x \in I \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |\lambda|\left|f^{(k)}(x)\right| \le \dfrac{2W_k}{\pi}\left\|f^{(k)}\right\|_\infty$.

b) En déduire que $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad f^{(k)} = 0$ et en déduire que $f \in Pl$

c) Soit $n = \deg f$, montrer que f est un vecteur propre de u_n . En déduire que $f = \alpha\, p_n$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$). Quelle est alors la valeur de λ ?

12) En conclusion, déterminer $Sp(u)$ et les sous espaces propres associés ainsi que $Sp(v)$ et les sous espaces propres associés.