PC* Devoir Maison N°5 facultatif

Problème 1 : Une démonstration de Cayley Hamilton

On rappelle que si $A,B \in M_n(K)$ alors $x \mapsto \det(A+xB)$ est une fonction polynôme de degré $\leq n$ (lemme du cours)

Pour une matrice $A \in M_n(K)$, on note $\Delta_{i,j}$ le mineur d'indice i,j .

On pose $cof_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ le cofacteur d'indice i,j et on pose $Com(A) = (cof_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice des cofacteurs de A ($Com(A)$ s'appelle la comatrice de A).

Soit $A \in M_n(K)$. Pour $i \neq j$, on note $A_{i,j}$ la matrice fabriquée à partir de A pour laquelle on a remplacé la i-ième colonne de A par sa j-ième colonne et on n'a pas changé les autres colonnes (autrement dit la matrice $A_{i,j}$ a deux colonnes égales)

1) Ecrire le développement de $\det(A_{i,j})$ par rapport à la i-ième colonne. A quoi est égal $\det(A_{i,j})$?

2) Montrer que $(Com(A))^T A = (\det A)I_n$. On admet qu'on a de même $A(Com(A))^T = (\det A)I_n$.

3) Soit $(D_k)_{0\leq k\leq p}$ une famille de matrices de $M_n(K)$ (à coefficients constants). Supposons que $\forall x \in K \quad \sum_{k=0}^{p} x^k D_k = 0$ montrer que $\forall k \in [\![0,p]\!] \quad D_k = 0$.

4) Soit $A \in M_n(K)$, on pose $\forall x \in K \quad C(x) = (Com(xI_n - A))^T$ et on pose $\chi_A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ le polynôme caractéristique de A .

Montrer que les coefficients de $C(x)$ sont des fonctions polynômes en x de degré $\leq n-1$. En déduire qu'il existe n matrices $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ de $M_n(K)$ telles que $\forall x \in K \quad C(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k$

5) Que donnent les relations de la question 2) appliquées à $xI_n - A$?

6) En déduire les égalités matricielles suivantes :

$AB_0 = a_0 I_n$ équation (0)

$AB_k - B_{k-1} = a_k I_n \quad k \in [\![1, n-1]\!]$ équation (k)

$-B_{n-1} = a_n I_n$ équation (n)

7) Qu'obtient on en multipliant l'équation (k) par A^k (resp l'équation (n) par A^n) ?

8) En déduire que $\chi_A(A) = 0$

Problème 2 : X-ENS

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $||.||_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E dans E tel que

$$\exists M \geq 0, \quad \forall f \in E, \quad ||T(f)||_E \leq M||f||_E \tag{1}$$

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E.

L'objectif de ce problème est d'étudier différents exemples ou classes de tels opérateurs dans le cadre de la dimension infinie.

On appelle respectivement :

(i) spectre de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif. On note $\sigma(T)$ l'ensemble de ces réels.

(ii) spectre ponctuel de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble de ces réels.

Les quatre parties sont indépendantes.

PARTIE 1. Un premier exemple d'opérateur

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||.||_\infty$:

$$||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On note T l'application définie sur E telle que :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = xf(\frac{x}{2}).$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

b) Calculer la valeur minimale possible pour la constante M dans la relation (1).

c) Déterminer $Ker(T)$ et $Im(T)$.

On se place à présent dans E muni de la norme $||.||_2$:

$$||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

d) Reprendre la question a) avec cette nouvelle norme pour E.

e) Reprendre la question b) avec cette nouvelle norme pour E. Pour cela, on pourra considérer la famille $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de E telle que :

(i) f_n est affine par morceaux,

(ii) $f_n(0) = f_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = 1$.

PARTIE 2. Un premier exemple de calcul de spectres

Soit $H = l^2(\mathbb{N})$, l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable :

$$l^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\}$$

muni de la norme :

$$||u||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}.$$

On note S, respectivement V, l'application de décalage à gauche :$(Su)_n = u_{n-1}$ si $n \geq 1$ et $(Su)_0 = 0$, respectivement à droite : $(Vu)_n = u_{n+1}$ si $n \geq 0$ dans $H = l^2(\mathbb{N})$.

a) Montrer que S et V appartiennent à $\mathcal{L}(H)$.

b) Calculer le spectre ponctuel de S et V.

On se place à présent dans l'espace des suites réelles bornées $F = l^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme

$$||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

c) Reprendre la question a) pour les applications S et V dans ce nouvel espace F.

d) Reprendre la question b) pour les applications S et V dans F.

e) Calculer le spectre de S et V dans F.

PARTIE 3. Un second exemple de calcul de spectre ponctuel

On note K la fonction définie de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$K(s,t) = (1-s)t$ si $0 \leq t \leq s \leq 1$ et $K(s,t) = (1-t)s$ sinon.

On note T l'application définie sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||.||_2$ définie en partie 1, par la relation :

$$\forall f \in E, \quad \forall s \in [0,1], \quad T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt.$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

b) Soit $f \in E$. En décomposant $T(f)$ en deux intégrales, montrer que $T(f)$ est une fonction C^2 et exprimer $(T(f))'$ puis $(T(f))''$.

c) Montrer que T est injectif.

d) Montrer que si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in Ker(T - \lambda Id)$, alors $f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ et vérifie l'équation

$$\lambda f'' + f = 0$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0$.

e) En déduire $\sigma_p(T)$. Calculer les sous-espaces propres associés $E_\lambda = Ker(T - \lambda Id)$ à chaque élément $\lambda \in \sigma_p(T)$.