PC* Devoir Maison N°8 Facultatif Niveau X-ENS

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

***

Matrices réelles de partie symétrique positive

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ sera muni du produit scalaire usuel noté $(.|.)$ et de la norme correspondante $\|.\|$. On notera $M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels, et I la matrice identité ; on munira $M_n(\mathbf{R})$ de la norme usuelle :

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ ,\ x \neq 0\right\} .$$

Une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ sera dite *s-positive* si l'on a $(Ax|x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbf{R}^n$.

Première partie

1. Montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a.

2. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur les valeurs propres de A_s, pour que A soit s-positive.

Deuxième partie

3. Montrer que, pour toute matrice s-positive A et tout nombre réel $\lambda > 0$, la matrice $\lambda I + A$ est inversible.

On posera alors $R_\lambda(A) = (\lambda I + A)^{-1}$.

4. (Étude d'exemples) On examinera les deux exemples suivants :

a) $n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Pour chacun de ces exemples : calculer Ker A, Im A, $R_\lambda(A)$, dire si $R_\lambda(A)$ (resp. $\lambda R_\lambda(A)$) admet une limite lorsque $\lambda \to 0$ et, si oui, donner cette limite.

Dans la suite de cette deuxième partie on se donne une matrice s-positive A et un réel $\lambda > 0$.

5. Démontrer les assertions suivantes :

5.a)
$$AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A = I - \lambda R_\lambda(A)\ .$$

5.b) Pour tout réel $\mu > 0$, on a
$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)\ .$$

6. Démontrer l'inégalité $\|R_\lambda(A)\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$, avec égalité si et seulement si det A est nul.

on admettra cela

7. Démontrer les assertions suivantes :

7.a) Pour tout $x \in$ Im A, $\lambda R_\lambda(A)x \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$.

7.b) L'espace $\mathbf{R}^n$ est somme directe de Ker A et Im A.

7.c) Lorsque λ tend vers 0, $\lambda R_\lambda(A)$ tend vers le projecteur sur Ker A parallèlement à Im A.

8. Montrer que l'application $\Phi : \lambda \mapsto R_\lambda(A)$ de $]0, +\infty[$ dans $M_n(\mathbf{R})$ est indéfiniment dérivable, et exprimer ses dérivées successives $\Phi^{(p)}$ en fonction de ses puissances $\Phi^q : \lambda \mapsto \Phi(\lambda)^q$.

c'est à dire toutes les composantes de $R_\lambda(A)$ sont C^∞ (de variable λ)

Troisième partie

Dans cette troisième partie on se donne une application F de $]0, +\infty[$ dans $M_n(\mathbf{R})$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda > 0\,,\ \|F(\lambda)\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\,;$

(ii) $\forall \lambda,\ \mu > 0\,,\ F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu)\,;$

(iii) $F(1)$ est inversible.

9. Montrer que $F(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda > 0$.

10.a) Calculer $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1}$.

10.b) Montrer que, lorsque $\lambda \to 0$, $F(\lambda)^{-1}$ admet une limite A et que l'on a, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I + A = F(\lambda)^{-1}$.

11. Montrer que les matrices $AF(\lambda)$ et A sont s-positives.