Lycée Clemenceau Nantes, PC, année 2023-2024* *le 13/01/24*

PC* Devoir Surveillé N°5 durée 4h Niveau X-ENS

Les parties *I* et *II* sont indépendantes

On assimilera une matrice carrée de taille 1 à un nombre.

Pour n'importe quelle matrice A, on note A^T la transposée de A

On admettra qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, si A est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P^{-1} = P^T$ telles que $A = PDP^{-1}$ (Théorème Spectral)

Définition : On dira qu'une matrice symétrique réelle A est symétrique positive si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T A X \geq 0$

On considère le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$: pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Si on considère $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on remarquera que $\langle x, y \rangle = X^T Y$. On pourra poser $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ (produit scalaire usuel dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$). On pose $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$; $N(X) = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ (norme euclidienne)

Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \underset{1 \leq i,j \leq n}{Sup} |a_{i,j}|$. On admet que cela définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ et que sa restriction à $M_n(\mathbb{R})$ est bien une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

Préliminaires

Les questions sont indépendantes, elles seront utiles dans la suite du problème

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A$ est symétrique positive
2) Montrer qu'une somme finie de matrices symétriques positives est symétrique positive.
3) Soit A une matrice symétrique positive, montrer que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On admettra la réciproque : si une matrice symétrique réelle A a toutes ses valeurs propres positives ou nulles alors elle symétrique positive.

4) Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T P = I_n$ (matrice identité), montrer que $\|P\| \leq 1$
5) Montrer que $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2 \quad \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$
6) Montrer que si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec A un bloc carré alors $\|A\| \leq \|M\|$ ($\|A\| = \underset{1 \leq i,j \leq p}{Sup} |a_{i,j}|$ pour $A \in M_p(\mathbb{C})$)

Partie I

Dans cette partie, on considère p matrices $A_1, \dots, A_p$ de $M_2(\mathbb{R})$ ($p \geq 2$) telles que , pour tout $t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$, la matrice $A(t) = t_1 A_1 + \dots + t_p A_p$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

1) Montrer que chaque matrice A_k (pour $k \in [\![1, p]\!]$) est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

On considère alors $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $Q_1 \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $D_1 = Q_1^{-1} A_1 Q_1$

On pose $B_2 = Q_1^{-1} A_2 Q_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}$

Supposons $\lambda_1 \neq \mu_1$ dans les questions 2) et 3)

2) a) Montrer qu'il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $t_2 \neq 0$ et $t_1 \lambda_1 + t_2 b_1 = t_1 \mu_1 + t_2 b_2$

b) Montrer que $b_3 = 0$ équivaut à $b_4 = 0$

Supposons que $b_3 b_4 \neq 0$ dans le reste de la question 2) et dans la question 3)

c) Montrer que b_3 et b_4 sont de même signe

3) Supposons $p \geq 3$. On pose $d = \sqrt{\dfrac{b_3}{b_4}}$, $D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = Q_1 D$. Pour $j \in [\![1,3]\!]$, on note $C_j = Q^{-1} A_j Q$

a) Calculer C_1 et C_2 , remarquez qu'elles sont symétriques.

b) On note $C_3 = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_4 & c_2 \end{pmatrix}$. Pour tout $t = (t_1, \dots, t_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose $C(t) = t_1 C_1 + t_2 C_2 + t_3 C_3 + t_4 I_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \gamma_3(t) \\ \gamma_4(t) & \gamma_2(t) \end{pmatrix}$; Montrer que pour tout $(t_2, t_3) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(t_1, t_4) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$

c) En déduire que $c_3 = c_4$

4) Etablir que quelles que soient $A_1, \dots, A_p \in M_2(\mathbb{R})$ telles que , pour tout $t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$, la matrice $A(t) = t_1 A_1 + \dots + t_p A_p$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, il existe une matrice inversible $Q \in M_2(\mathbb{R})$ telle que les matrices $Q^{-1} A_1 Q, \dots, Q^{-1} A_p Q$ soient toutes symétriques.

Partie II

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$). On note I la matrice identité.

Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note (Γ) la condition suivante :

(Γ) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la matrice $M - zI$ est inversible et il existe $K > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $|\mathrm{Im}\, z| \left\| (M - zI)^{-1} \right\| \leq K$

1) Montrer que si M vérifie (Γ) alors toute matrice semblable à M vérifie (Γ) et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $M - \alpha I$ vérifie (Γ)

2) Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ avec M_1 un bloc carré de taille k. Montrer que si M vérifie (Γ) dans $M_n(\mathbb{R})$ alors M_1 vérifie (Γ) dans $M_k(\mathbb{R})$

3) On suppose A diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit D une matrice diagonale réelle semblable à A

Montrer que D vérifie la condition (Γ) avec $K=1$. En déduire que A vérifie la condition (Γ)

4) Soit M une matrice nilpotente réelle non nulle, montrer que $I-M$ est inversible et déterminer son inverse

(raisonner par analogie avec les séries géométriques). Pour $x \in \mathbb{R}^*$, déterminer $\left(M-\frac{i}{x}I\right)^{-1}$.Montrer que

M ne vérifie pas la condition (Γ).

5) On suppose que A vérifie la condition (Γ)

a) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles. (χ_A est donc scindé sur $\mathbb{R}$)

b) Supposons que A n'est pas diagonalisable.

Montrer que A est semblable à une matrice A' de la forme $A'=\begin{pmatrix}\lambda I_k+M & E\\ 0 & C\end{pmatrix}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, $k\geq 2$,

$C\in M_{n-k}(\mathbb{R})$ triangulaire n'admettant pas λ comme valeur propre, $E\in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ et $M\in M_k(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle. Obtenir une contradiction et en déduire que A est diagonalisable.

6) On suppose à nouveau que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ et de sous espaces propres $E_{\lambda_1},\dots,E_{\lambda_q}$. On note p_i la projection sur E_{λ_i} parallèlement à la somme des autres sous espaces propres. On note P_i la matrice de p_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\sum_{i=1}^{q} P_i = I$, $A=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i P_i$ et $P_iP_j=0$ pour $i\neq j$

b) Soit $G=\sum_{i=1}^{q} P_i^T P_i$. Montrer que G est une matrice symétrique positive et inversible.

c) Calculer GA en fonction de $P_1,\dots,P_q$

d) Etablir que A vérifie la condition (Δ) suivante :

(Δ) : Il existe deux matrices symétriques réelles R et S telles que les valeurs propres de R soient strictement positives et telles que $A=RS$

7) a) Soit D une matrice diagonale réelle dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls. Montrer qu'il existe une matrice diagonale réelle D' dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls telle que $D'^2=D$

b) On suppose que A vérifie la condition (Δ). Prouver qu'il existe une matrice symétrique inversible H telle que $H^2=R$ (on pourra se servir du Théorème Spectral énoncé en début de sujet pour la matrice R).
Calculer $H^{-1}AH$ et en déduire que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

Partie III

Dans cette partie, on considère p matrices $A_1,\dots,A_p$ de $M_n(\mathbb{R})$ ($p\geq 2$, $n\geq 2$)

. Pour tout $t=(t_1,\dots,t_p)\in\mathbb{R}^p$,on pose $A(t)=t_1A_1+\dots+t_pA_p$

On introduit les quatre conditions suivantes :

$(C\,I)$: Il existe $C_1>0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}^p$, il existe une matrice inversible $Q(t)\in M_n(\mathbb{R})$ telles que $D(t)=Q(t)^{-1}A(t)Q(t)$ soit diagonale et $\forall t\in\mathbb{R}^p\quad \|Q(t)\|\le C_1$ et $\left\|Q(t)^{-1}\right\|\le C_1$

$(C\,II)$: Pour tout $t\in\mathbb{R}^p$ et pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, la matrice $A(t)-zI$ est inversible et il existe $C_2>0$ telle que $\forall t\in\mathbb{R}^p\quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\quad |\mathrm{Im}\,z|\left\|(A(t)-zI)^{-1}\right\|\le C_2$

$(C\,III)$: Il existe $C_3>0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}^p$, il existe deux matrices symétriques réelles $R(t)$ et $S(t)$ telles que les valeurs propres de $R(t)$ soient strictement positives et $A(t)=R(t)S(t)$ et $\forall t\in\mathbb{R}^p\quad \|R(t)\|\le C_3$ et $\left\|R(t)^{-1}\right\|\le C_3$

$(C\,IV)$: Pour tout $t\in\mathbb{R}^p$, la matrice $A(t)$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

1) Prouver que $(C\,I)$ implique $(C\,II)$

2) On suppose $(C\,II)$ vérifiée. Pour $t\in\mathbb{R}^p$ et $A=A(t)$, on reprend les notations de la partie II

a) Calculer $(A-zI)^{-1}$ en fonction de $P_1,\dots,P_q$. En déduire que

$$\forall k\in[\![1,q]\!]\quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\quad \|P_k\|\le|\lambda_k-z|\left(\left\|(A-zI)^{-1}\right\|+\sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{q}|\lambda_i-z|^{-1}\|P_i\|\right)$$

b) En posant $z=\lambda_k+i\varepsilon$ avec $\varepsilon\ne0$ et en faisant tendre ε vers 0, montrer que $\|P_k\|\le C_2$

c) Trouver une constante $C_3'>0$ ne dépendant que de n et de C_2 telle que $\left\|R^{-1}\right\|\le C_3'$

(on rappelle que $R=G^{-1}$)

d) On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}^n\quad N(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ (norme euclidienne)

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^n\quad N(x)^2\le q\sum_{i=1}^{q}N(p_i(x))^2\le qN(x)N(g(x))$ où g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice G dans la base canonique.

e) Soit r l'endomorphisme associé à R. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^n\quad N(r(x))\le qN(x)$. En déduire qu'il existe une constante $C_3''>0$ ne dépendant que de n telle que $\|R\|\le C_3''$

f) Montrer que $(C\,II)$ implique $(C\,III)$

3) Montrer que pour toute matrice réelle symétrique K de valeurs propres $\mu_1,\dots,\mu_n$ on a :

$\frac{1}{n^2}\|K\|\le \underset{1\le i\le n}{Sup}|\mu_i|\le n\|K\|$. Prouver que $(C\,III)$ implique $(C\,I)$

4) a) On suppose $n=2$. Prouver que $(C\,I)$ est équivalente à $(C\,IV)$

b) Soient $A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Montrer que $\forall(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2\quad t_1A_1+t_2A_2$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

c) En déduire que pour $n\ge3$, $(C\,IV)$ n'entraine ni $(C\,I)$ ni $(C\,II)$ ni $(C\,III)$