1

**PC* Devoir Surveillé N°4 durée 4h Niveau E3A/CCINP**

## *Problème 1*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$

I **Modes de convergence de** $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$

1) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$. Faire le tableau de variations de $\varphi_n$ sur $\mathbb{R}^+$

3) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$

4) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[a,b]$

5) Dans cette question, on suppose que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad R_n(x) \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$. En déduire que $R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \not\to 0 \quad (n \to +\infty)$

b) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur un intervalle du type $[0,a]$ avec $a > 0$

II **Continuité et dérivabilité de** $S$

6) Montrer que $S$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

7) Montrer que si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $S$ est continue en $0$

8) Dans cette question, on suppose que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

a) Soit $f : t \mapsto \dfrac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$. Montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

c) Calculer $\int_1^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,dt$. En déduire que $S$ n'est pas continue en $0$

d) On pose $\alpha = \dfrac{1}{2}$. A l'aide de la question b) déterminer $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$

III On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$ pour $\alpha > 0$

9) Montrer que $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

( On pourra utiliser la question 2) )

10) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\quad F(x)-S(x)=-2^{\frac{1}{2}-\alpha}S\left(\sqrt{2}\,x\right)$

En déduire que si $\alpha<\frac{1}{2}$, $S$ n'a pas de limite finie en $0$

11) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. $S$ est-elle intégrable en $+\infty$ ?

12) Montrer que $x\mapsto\frac{S(x)}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Exprimer alors $\int_1^{+\infty}\frac{S(x)}{x}dx$ sous la forme de la somme d'une série.

**Problème 2**

Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $S_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-xn^\alpha}$ ( quand elle est définie ). Le but est d'étudier $S_\alpha$

## Partie I : premières propriétés des fonctions $S_\alpha$ ($\alpha>0$).

1. *Étude du cas particulier de la fonction $S_1$.*

   (a) Étudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant $S_1$ :
$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-xn}.$$

   (b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand $x$ tend vers 0.

   (c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x)-1$ en $+\infty$.

2. *Étude du domaine de définition des fonctions $S_\alpha$ ($\alpha>0$).*

   Montrer que le domaine de définition de $S_\alpha$ est $\mathbb{R}_+^*$

3. *Premières propriétés des fonctions $S_\alpha$ ($\alpha>0$).*

   (a) Pour tout $\varepsilon>0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\left(x\mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ sur $[\varepsilon,+\infty[$. En déduire la continuité de la fonction $S_\alpha$ sur $]0,+\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

   (b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0<x\leqslant y$ et préciser le sens de variation de la fonction $S_\alpha$. En déduire que la fonction $S_\alpha$ admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

   (c) montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}S_\alpha(x)=1$.

   (d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x)\geqslant\sum_{n=0}^{N}e^{-xn^\alpha}$ pour tout entier naturel $N$ et pour tout réel $x>0$, établir, pour tout entier naturel $N$, que : $\lim\limits_{x\to 0}S_\alpha(x)\geqslant N+1$.
   Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand $x$ tend vers $0$ ?

# PARTIE II : étude de $S_\alpha(x)$ quand $x$ tend vers 0 et $+\infty$.

4- *Comparaison de deux intégrales.*

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \text{et} \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt.$$

(a) Pour quelles valeurs de $\alpha$ les intégrales $\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}du$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ convergent-elles ? En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel $n$.

(c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = xt^\alpha$.
Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$ ?

5- *Recherche d'un équivalent de $S_\alpha$ en 0 ($\alpha > 0$).*

(a) En encadrant $e^{-xn^\alpha}$ par des intégrales, , établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 1.$$

(b) Retrouver $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x)$, puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand $x$ tend vers 0.

6- *Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$).*

(a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

(b) Établir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du.$$

Justifier ensuite l'inégalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \leqslant \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

En déduire enfin l'équivalence suivante lorsque $x$ tend vers $+\infty$ :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

(c) En conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$ est négligeable devant $e^{-x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

7- *Recherche d'un équivalent de $S_\alpha$ en $+\infty$ ($\alpha > 0$).*

(a) Établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$$

(b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Problème 3**

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \quad \cot an x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ . On admettra que $\forall x \in ]-1,1[ \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$

Soit $I = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx$ . Le but du problème est de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $I$

1) Montrer que $\varphi : x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ peut se prolonger par continuité sur $[0,1]$

On peut alors écrire $I = \int_0^1 \varphi(x)dx$ et considérer $I$ comme une intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln x\, dx$ . Montrer que $J_n$ converge et la calculer.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose $\forall x \in ]0,1] \quad u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}\ln x$ et $u_n(0) = 0$

a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1] \quad \varphi(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

b) En déduire que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$ . Montrer alors que $I = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

On va chercher à calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \dfrac{1}{2i}\left[(X+i)^n - (X-i)^n\right]$

a) Déterminer le degré de $P_n$ et son coefficient dominant .

b) Déterminer les racines de $P_n$ ( $n \geq 2$ ) .En déduire une factorisation de $P_n$ .

5) a) Montrer que $\forall n \quad P_{2n+1}(-X) = P_{2n+1}(X)$ . Soit $P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ .Montrer que $\forall i \quad a_{2i+1} = 0$

b) Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n$ tel que $P_{2n+1} = Q_n(X^2)$

Donner le degré de $Q_n$ . Montrer que les racines de $Q_n$ sont $\cot an^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in [\![1,n]\!]$

c) Montrer alors que $\sum_{k=1}^{n} \cot an^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \dfrac{n(2n-1)}{3}$

6) Montrer que $\forall x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[ \quad \sin x \leq x \leq \tan x$ et $\cot an^2 x \leq \dfrac{1}{x^2} \leq 1 + \cot an^2 x$

7) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, appliquer l'inégalité précédente à $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$

En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ . En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ et de $I$