PC* Devoir Maison N°1

Problème 1 : formule de Stirling et constante d'Euler

Partie I -

On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

où n désigne un entier naturel.

I.A -

I.A.1) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

I.A.2) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$

I.B -

I.B.1) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$. Montrer l'équivalence : $I_n \sim I_{n+1}$

I.B.2) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante et en déduire l'équivalence : $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

I.B.3) **Application 1**
Montrer, lorsque t, réel, tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^t dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

I.B.4) **Application 2**
À l'aide de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x dx$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\sin x|^x dx$ est divergente.

Indication : Exprimer u_n sous forme d'une intégrale sur $[0,\pi]$ puis montrer que $u_n \geq 2\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{(n+1)\pi} du$ et utiliser la question précédente - Montrer que $\sum u_n$ diverge

I.C - On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln n!$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

I.C.1) Montrer l'équivalence :

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}.$$

I.C.2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera S sa limite.

I.D - Établir l'existence d'une constante $C>0$ telle que :

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

I.E - En utilisant la question I.B.2, en déduire l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Partie II -

On admet que $\forall x\in\,]-1,1[\quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$ quand $n\to+\infty$

On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$.

II.A. Montrer que f est définie sur $[-1,1[$

II.B. On pose $\forall x\in\,]-1,1[\quad g(x)=f(x)+\ln(1-x)$. Ecrire $g(x)$ sous forme de série . Montrer que g est bornée et décroissante sur $[0,1[$. En déduire que g admet une limite finie en 1.

On pose $l=\lim_{x\to1}g(x)$ .On prolonge g par continuité en 1 en posant $g(1)=l$.

II.C On admet que $g(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)$ (c'est-à-dire que l'expression de $g(x)$ sous forme de série est valable en $x=1$)

Montrer que $l=-\gamma$

II.D **Une expression intégrale de γ.**

On pose $I=\int_0^1\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\ln(1-t)}\right)\mathrm{d}t$.

1) Montrer l'existence de I.

2) Montrer que $I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx$ et que l'application

ϕ : $x\mapsto\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$I = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x) dx .$$

[indication : calculer $\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} dx$ de 2 façons]

4) Montrer que pour $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx .$$

5) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx .$$ (on écrira $\int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon} \left(\frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{1}{x}\right) dx$)

6) En déduire $I = \gamma$.

Problème 2 : intégrale de Dirichlet

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (on rappelle que cette intégrale converge)

Pour tout entier naturel non nul n, on définit I_n et J_n par : $I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \mathrm{d}t$.

1- **a.** Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \mathrm{d}t$.

b. Soient $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et k un entier naturel non nul.

Ecrire $\sin x \cos(2kx)$ à l'aide d'une différence de deux « sinus » et en déduire une relation entre $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ et $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.

c. Calculer J_n.

2- **Lemme de Lebesgue**

Soit g une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$ où a et b sont des réels avec $a < b$.

On pose, pour tout entier naturel n, $L_n = \int_a^b g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$. Montrer en utilisant une intégration par parties que la suite (L_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3- On définit la fonction φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi(0) = 0$.

a. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ.

b. Montrer que φ est C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. **Conclusion**

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale I.