PC* Devoir Surveillé N°2 durée 4h

Problème 1 :

Les 5/2 ne sont pas autorisés à utiliser les théorèmes sur les intégrales à paramètre

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$

I

1) Déterminer D l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$ converge (D est alors le domaine de définition de F)

2) Montrer que F est croissante sur D

3) En utilisant l'inégalité $1 \leq \sqrt{1+t} \leq 1+t$ pour $t \in]0,1]$, donner un encadrement de $F(x)$.

4) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$ et un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$. Déterminer également $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$

On pose $G(x) = \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}\,dt$.

5) Montrer que $\forall x \in D \quad F(x) = \frac{\sqrt{2}}{1-x} - \frac{1}{2(1-x)}G(x)$

6) A l'aide d'un encadrement, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x)$ et un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to -\infty$.

II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 (-\ln t)^n\,dt$

1) Montrer que l'intégrale I_n est convergente

2) Etablir une relation entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_n

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}(-\ln t)^n\,dt$

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n$ est défini et vérifie $0 \leq b_n \leq 1$

4) Soit $x \in]-1,1[$, montrer que la série $\sum b_n x^n$ est absolument convergente.

5) On admet pour l'instant que $\forall x \in]-1,1[\quad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on peut écrire $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et exprimer les coefficients a_n au moyen des coefficients b_n

6) On veut prouver que l'on a bien $\forall x \in]-1,1[\quad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

On pose pour $x \in]-1,1[$ et $t \in]0,1]$, $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln t)^k x^k}{k!} \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ et $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-\ln t)^k x^k}{k!} \frac{t}{\sqrt{1+t}}$

a) Montrer que $\forall t \in]0,1]$ $S_n(t) + R_n(t) = \frac{t e^{-x\ln t}}{\sqrt{1+t}}$

b) Montrer que S_n est intégrable sur $]0,1]$ et en déduire que R_n est aussi intégrable sur $]0,1]$. On remarquera que l'on a alors $\forall x \in]-1,1[$ $G(x) = \int_0^1 S_n(t)\,dt + \int_0^1 R_n(t)\,dt$

c) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left| e^u - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \right| \leq \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|u|}$

d) En déduire une majoration de $|R_n(t)|$

e) Pour $x \in]-1,1[$ On pose $J_n = \int_0^1 (-\ln t)^n t^{1-|x|}\,dt$. Montrer que J_n converge et que $\int_0^1 |R_n(t)|\,dt \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} J_{n+1}$

f) Déterminer une relation entre J_n et J_{n-1} . En déduire la valeur de J_n

g) En déduire une majoration de $\int_0^1 |R_n(t)|\,dt$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 R_n(t)\,dt = 0$

h) Montrer enfin que $\forall x \in]-1,1[$ $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Problème 2 :

Notations

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note p_α la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^\alpha \end{array} \right.$.

I Préliminaires : étude de quelques éléments de E

I.A – *Des fonctions de E utiles pour la suite*

Q 1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, p_α appartient à E.

Q 2. Soit P une fonction polynomiale non identiquement nulle à coefficients réels. Montrer que la restriction de P à $\mathbb{R}_+^*$ appartient à E si et seulement si $P(0) = 0$.

Q 3. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & ae^t + b \end{array} \right.$ appartient à E si et seulement si $a = b = 0$.

Q 4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} \end{array} \right.$ est intégrable sur $]0, x]$.

Q 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$ où $\min(x,t)$ désigne le plus petit des réels x et t. Représenter graphiquement la fonction k_x. Montrer que k_x appartient à E.

I.B – *Une condition suffisante d'appartenance à E*

Dans cette sous-partie, on suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0, \\ \exists C > 0\,;\ \forall x > 0,\quad |f'(x)| \leqslant C\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

Q 6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Phi(x) = \dfrac{4\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}}{1+x} - \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{t/2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = 0$ et que, pour tout $x > 0$, $\Phi'(x) \geqslant 0$. En déduire que $\Phi(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

Q 7. Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant 4C\dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$.

Q 8. En déduire que $f \in E$.

II Structure préhilbertienne de E

Q 9. Montrer que, si f et g sont deux fonctions de E, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Indication : utiliser l'inégalité $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Q 10. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toutes fonctions $f \in E$ et $g \in E$, on pose, $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q 11. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f \in E$ par

$$\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Q 12. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\|k_x\| = 0$. On rappelle que, pour tout $x > 0$, $k_x(t) = \mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1$.

Indications : -Montrer que $t \mapsto \dfrac{(e^t-1)^2 e^{-t}}{t}$ est prolongeable par continuité en 0

-Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq \frac{e^{-x}}{x}$

Q 13. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k!$.

Q 14. On rappelle que les fonctions p_α ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle une famille orthogonale de E ?

III Un opérateur sur E

À chaque fonction $f \in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x > 0$ par

$$U(f)(x) = \langle k_x \mid f\rangle = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1) f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

III.A –

Q 15. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} U(f)(x) = 0.$$

Q 16. Montrer que pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$U(f)(x) = \int_0^x (1-e^{-t})\frac{f(t)}{t}\,dt + (e^x - 1)\int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Q 17. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie, pour tout $x > 0$,

$$(U(f))'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de la fonction $U(f)$ est notée $U(f)'$.

Q 18. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $U(f)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}. \tag{III.1}$$

Q 19. Montrer que pour tout $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$|U(f)'(x)| \leqslant e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)^{1/2} \leqslant \|f\|\frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}.$$

Indication : on appliquera judicieusement Cauchy-Schwarz à $\left|\int_x^y f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt\right|$ puis on fera $y \to +\infty$

Q 20. Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$,

$$|U(f)(x)| \leqslant 4\|f\|\frac{\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x}.$$

Q 21. En déduire que

$$\|U(f)\| \leqslant 4\|f\|.$$

Q 22. Montrer que U est injectif.

Q 23. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

III.B – On fixe deux fonctions f et g de E. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = -U(f)'(x)e^{-x}.$$

Q 24. Vérifier que F est une primitive de $x \mapsto f(x)\frac{e^{-x}}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Q 25. Montrer que pour tout $x > 0$, $|F(x)U(g)(x)| \leqslant \frac{4\|f\|\|g\|}{1+x}$.

Q 26. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $|F(x)| \leqslant \|f\|(e^{-1} - \ln(x))^{1/2}$.
On pourra utiliser la question 19.

Q 27. Montrer l'existence et calculer les valeurs des limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto F(t)U(g)(t)$.

Q 28. Montrer que $\langle f \mid U(g)\rangle = \int_0^{+\infty} U(f)'(t)U(g)'(t)e^{-t}\,dt$.

Q 29. En déduire que $\langle f \mid U(g)\rangle = \langle U(f) \mid g\rangle$.