PC*   Devoir Surveillé N°4 durée 4h   Niveau Centrale/Mines

La troisième partie est indépendante des deux premières.

« Continûment dérivable » veut dire « de classe C^1 »

On pose $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\left(\ln\left(\tan x\right)\right) dx$

Première partie

Il est admis que, si la fonction réelle f, définie sur un intervalle I de la droite réelle $\mathbb{R}$, est convexe, pour toute suite croissante de trois réels x_1, x_2, x_3, $(x_1 < x_2 < x_3)$ appartenant à l'intervalle I, les valeurs prises par cette fonction en ces points vérifient la relation suivante :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie sur la demi-droite ouverte $]0, +\infty[$, prenant des valeurs strictement positives $(F(x) > 0)$, qui vérifie les propriétés suivantes :

i. pour tout réel x strictement positif : $F(x+1) = xF(x)$.
ii. La fonction $x \mapsto \ln F(x)$ est une fonction convexe.
iii. La fonction F prend la valeur 1 en 1 : $F(1) = 1$.

Encadrement de F (n + x) et de F (x) :

Dans les quatre premières questions, x est un réel appartenant à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2 $(n \geqslant 2)$.

1) Démontrer les inégalités suivantes : $\ln F(n) - \ln F(n-1) \leqslant \dfrac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leqslant \ln F(n+1) - \ln F(n)$.
2) Calculer $F(n)$. En déduire un encadrement de $F(n+x)$ à l'aide des deux expressions $(n-1)^x.(n-1)!$ et $n^x.(n-1)!$.
3) Etablir la relation qui lie, pour tout entier p supérieur ou égal à 1 $(p \geqslant 1)$, $F(p+x)$ à $F(x)$.
4) En éduire les inégalités suivantes : $\dfrac{n}{x+n} F(x) \leqslant \dfrac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)} \leqslant F(x)$.

Unicité de la fonction F :

Dans les questions 5 et 6, il est admis qu'il existe une fonction F, positive $(F(x) > 0)$, définie sur la demi-droite ouverte $]0, +\infty[$, vérifiant les hypothèses i, ii et iii. Etant donné un entier strictement positif n, soit u_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, +\infty[$ par la relation suivante : $u_n(x) = \dfrac{n^x.n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

5) Déterminer, en supposant le réel x appartenir à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$, la limite de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment.
6) En déduire la limite de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment, pour tout réel x strictement positif.
7) En déduire qu'il existe au plus une fonction F définie sur la demi-droite $]0, +\infty[$, strictement positive, vérifiant les propriétés i, ii et iii.

Fonction Γ :

Soit k la fonction définie sur le quart de plan $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par la relation suivante :

$$k(x, t) = t^{x-1}.e^{-t}.$$

8) Etudier, pour un réel x donné, l'intégrabilité de la fonction : $t \mapsto t^{x-1}.e^{-t}$ sur la demi-droite ouverte $]0, +\infty[$.

Soit Γ la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,+\infty[$ par la relation suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}dt.$$

9) Etablir que cette fonction Γ est strictement positive ($\Gamma(x) > 0$).

On admet que la fonction Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \text{et} \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

10) Préciser l'expression de la dérivée de la fonction Γ pour $x = 1$, $\Gamma'(1)$, au moyen d'une intégrale.

Existence de la fonction F :

11) a) Soient a , b , x dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$. Montrer que

$$\left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \ln t\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt\right)\left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2\, dt\right)$$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$

c) Démontrer que la fonction Γ est la fonction F étudiée dans les questions précédentes.

On a donc en particulier $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x)$

Il est admis, dans la suite, que la constante d'Euler γ est définie par la relation suivante :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right).$$

Valeur de $\Gamma'(1)$:

Soit $(g_n)_{n \geqslant 1}$ la suite des fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geqslant 1$), sur la demi-droite ouverte $]0,+\infty[$ par la relation suivante :

$$g_n(x) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{k})$$

12) Déterminer, à l'aide des résultats obtenus précédemment, la limite de $g_n(x)$ lorsque l'entier n croît vers l'infini et que le réel x appartient à la demi droite-ouverte $]0,+\infty[$.
Soit $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n = 1$), sur la demi-droite ouverte $]0,+\infty[$ par les relations suivantes :
$v_1(x) = g_1(x)$; pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $v_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$.

13) Il est admis que chaque fonction v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continûment dérivable ; démontrer que la série des fonctions dérivées, de terme général $v_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente pour tout x strictement positif puis uniformément convergente sur tout segment $[a,b]$ contenu dans la demi-droite ouverte $]0,+\infty[$.

14) En déduire la limite de la suite des fonctions dérivées g_n'.

15) Que vaut $\Gamma'(1)$ au moyen de la constante d'Euler. ?

Seconde partie

Soit s un réel donné strictement positif ($s > 0$).

Fonction L :

16) Etudier la convergence de la série de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}$, défini par la relation suivante : $w_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$.

Soit L la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,+\infty[$ par la relation : $L(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$.

17) Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s} x^{2n+1}$, est uniformément convergente sur le segment $[0,1]$.

Soit $\varphi(x)$ la somme de cette série : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} x^{2n+1}$. Déterminer la fonction φ définie sur le segment $[0,1]$. En déduire $L(1)$.

18) Soit h_s la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,+\infty[$, par la relation suivante : $h_s(x) = \frac{\ln x}{x^s}$. Etudier les variations de la fonction h_s sur son ensemble de définition. Soit x_s l'abscisse du maximum de cette fonction. Préciser les variations de la fonction $s \mapsto\mapsto x_s$.

19) Démontrer que la fonction L est continûment dérivable sur la demi-droite ouverte $]0,+\infty[$. Exprimer la valeur prise en 1 par la fonction dérivée L', $L'(1)$, au moyen de la somme d'une série.

Expression du produit L (s) .G (s) :

20) Calculer, pour tout entier n strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$), au moyen d'une valeur prise par la fonction Γ, l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt$.

21) Démontrer la relation : $L(s).\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} t^{s-1} dt$.

Calcul de l'intégrale I :

Il est admis que la fonction $s \mapsto L(s).\Gamma(s)$ est continûment dérivable et que sa dérivée est donnée par la relation suivante : $\frac{d}{ds}(L(s).G(s)) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\ln t}{1+e^{-2t}} t^{s-1} dt$.

22) Après avoir donné au réel s la valeur 1, effectuer le changement de variable $u = e^t$ dans l'intégrale. Effectuer un nouveau changement de variables pour obtenir l'intégrale I définie dans le préambule :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x)) dx$$

En déduire une expression de l'intégrale I à l'aide de la constante d'Euler et de la somme d'une série.

Troisième partie : généralisation de la formule de Stirling

On considère la fonction Γ introduite dans la partie précédente. On rappelle que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

On pose $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad h(t) = t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t

On pose également $\forall X \in \mathbb{R}^+ \quad H(X) = \int_0^X h(t)dt$

23) En utilisant Stirling, montrer que $\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + o(1) \quad (n \to +\infty)$

On va généraliser cette formule à la fonction Γ

24) Montrer que h est 1-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et bornée sur $\mathbb{R}^+$

25) Montrer que H est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

26) Calculer $H(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^+ \quad H(X) = \frac{1}{2}(X - \lfloor X \rfloor)(X - \lfloor X \rfloor - 1)$

En déduire que H est bornée sur $\mathbb{R}^+$

27) Soit $x>0$. Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{H(t)}{(t+x)^2}dt$ converge.

28) Soit $X\in\mathbb{R}^+$ et $n=\lfloor X\rfloor$. En écrivant $\int_0^x\frac{h(t)}{t+x}dt=\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{h(t)}{t+x}dt+\int_n^x\frac{h(t)}{t+x}dt$,

déterminer une relation entre $\int_0^x\frac{h(t)}{t+x}dt$ et $\int_0^X\frac{H(t)}{(t+x)^2}dt$

29) En déduire que $\int_0^{+\infty}\frac{h(t)}{t+x}dt$ converge et que $\int_0^{+\infty}\frac{h(t)}{t+x}dt=\int_0^{+\infty}\frac{H(t)}{(t+x)^2}dt$ pour $x>0$.

On pose $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad F_n(x)=\ln\left(\frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\right)$

On a donc $F_n(x)\to\ln(\Gamma(x+1))\quad(n\to+\infty)$

30) On considère toujours $x>0$ .Montrer que $\forall i\in\mathbb{N}\quad\int_{x+i}^{x+i+1}\ln t\,dt=\ln(x+i)-\int_i^{i+1}\frac{u-i-1}{u+x}du$

En déduire que $\int_x^{x+n+1}\ln t\,dt=\sum_{i=0}^{n}\ln(x+i)-\int_0^{n+1}\frac{h(u)}{u+x}du+\frac{1}{2}\int_0^{n+1}\frac{du}{u+x}$

Montrer alors que

$$F_n(x)=\ln(n!)+(x+1)\ln n-\left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1)+n+1+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-\int_0^{n+1}\frac{h(u)}{u+x}du$$

31) En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad\ln(\Gamma(x+1))=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\int_0^{+\infty}\frac{h(u)}{u+x}du$ (utiliser 23))

32) En déduire que $\ln(\Gamma(x+1))=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\to+\infty)$

On veut affiner ce développement

33) On pose $\forall X\in\mathbb{R}^+\quad K(X)=\int_0^X H(t)dt$

a) Montrer que K est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

On admettra que $\forall X\in\mathbb{R}^+\quad K(X)=-\frac{1}{12}X+B(X)$ avec B une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$

b) On considère toujours $x>0$. Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{H(t)}{(t+x)^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{K(t)}{(t+x)^3}dt$.

c) En déduire que $\ln(\Gamma(x+1))=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)+\frac{1}{12x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad(x\to+\infty)$