Feuille 18 corrigé ex 18

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

---

Cela revient à montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

$A = PTP^{-1}$ P inversible et T triangulaire

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A $\quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

idée : introduire une "perturbation" des valeurs propres de T pour les rendre toutes distinctes.

1er cas : les $\lambda_i$ sont toutes égales. Posons $\lambda = \lambda_i \ \forall i \in [\![1,n]\!]$

$T = \begin{pmatrix} \lambda & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$ posons $T_k = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{k} & & & (*) \\ & \lambda + 2/k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda + \frac{n}{k} \end{pmatrix}$

$T_k \to T \ (k \to +\infty)$

les valeurs propres de $T_k$ sont toutes $\neq$ donc $T_k$ est diagonalisable. Posons $A_k = PT_kP^{-1} \to A \quad (k \to +\infty)$

et $A_k$ est diagonalisable

2ème cas : $\exists i,j$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j$

Posons $\alpha = \min\{|\lambda_i - \lambda_j|, (i,j) \in [\![1,n]\!], \lambda_i \neq \lambda_j\}$ $\quad \alpha \neq 0$

(plus petit écart entre 2 valeurs propres distinctes)

posons $\lambda'_{i,k} = \lambda_i + \frac{\alpha}{ik} \quad i \in [\![1,n]\!]$

on va montrer que $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ sont $\neq$

- si $\lambda_i = \lambda_j$ $(i \neq j)$ alors $\lambda'_{i,k} - \lambda'_{j,k} = \frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right) \neq 0$
- si $\lambda_i > \lambda_j$ $\quad \lambda'_{i,k} - \lambda'_{j,k} = \lambda_i - \lambda_j + \frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right)$

$\left|\frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right)\right| \leq \frac{\alpha}{k} \times 2$ (majorer $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{j}$ par 1)

pour $k \geq 3$ $\quad \left|\frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right)\right| < \alpha \cdot \frac{2}{3}$ donc $\frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right) > -\alpha \cdot \frac{2}{3}$

et $\lambda_i - \lambda_j \geq \alpha$ donc $\lambda'_{i,k} - \lambda'_{j,k} > 0$ idem si $\lambda_i < \lambda_j$ puis conclure