Fonctions de plusieurs variables

1) Soit $f(x,y)=\dfrac{x^4-2y^4}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$
2) Déterminer les dérivées partielles de f en $(0,0)$ si elles existent
3) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle en tout point

2) Soit $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$g_1: t\mapsto f(\cos t,\sin t)$; $g_2: x\mapsto f(x,x)$; $g_3: x\mapsto f(x,-x)$; $g_4: x\mapsto f(0,x)$

3) Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme auto-adjoint de E.
Montrer que l'application $f: x\mapsto (u(x)\backslash x)$ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle en tout point.

4) Soit $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{\|x\|^2}$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle en chaque point

5) A l'aide du changement de variables $u=x$; $v=-2x+y$, déterminer toutes les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x}+2\dfrac{\partial f}{\partial y}=x$

6) A l'aide du changement de variables $x=\dfrac{u^2+v^2}{2}$; $y=\dfrac{u}{v}$, trouver les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ telles que $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}+\left(1+y^2\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

7) A l'aide du changement de variables $u=-2x+y$; $v=x+y$, déterminer toutes les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

8) Déterminer les extremums des fonctions suivantes :

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\,;(x,y)\mapsto x^2+y^2+xy-3x-6y$
2) $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}\,;(x,y)\mapsto x^3+y^3-2xy$
3) $f:D\to\mathbb{R}\,;(x,y)\mapsto(x-y)^3+6xy$ avec $D=\{(x,y)\backslash -1\leq x\leq y\leq 1\}$.
4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\,;(x,y)\mapsto xe^y+ye^x$
5) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\,;(x,y,z)\mapsto 1+4x+4y-2z+4x^2+6xy-4xz-2yz+z^2$