Révisions

1) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $(A+I)^2 A(A-2I)=0$ et $tr(A)=4$

Déterminer $Sp(A)$ et montrer que A est diagonalisable

2) Pour $A \in M_n(K)$,on pose $C_A = \{M \in M_n(K) \setminus M\,A = A\,M\}$

Soit $D \in M_n(K)$ une matrice diagonale dont les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes. Montrer que si $M \in C_D$ alors M est diagonale **et** montrer alors qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $M = P(D)$.En déduire que $C_D = \{P(D) \setminus P \in K[X]\}$. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice dont les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes. Montrer que $C_A = \{P(A) \setminus P \in K[X]\}$

3) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2+1}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

4) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{-x}}{\ln n}$. Déterminer le domaine de définition de la fonction f . Montrer que f est de classe C^1 sur son ensemble de définition

5) Soit $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que cette intégrale est bien définie**.** Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et la nature de la série $\sum u_n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$

6) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt$

7) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$ .Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Etudier ses variations et donner un équivalent de f en $+\infty$

8) On effectue une succession de tirages dans une urne contenant une proportion de p boules bleues , q boules vertes et r boules rouges. Tous les tirages sont effectués avec remise. On note X_n le nombre de boules bleues tirées après n tirages et Y_n le nombre de boules vertes tirées après n tirages .

1) Déterminer les lois de X_n et Y_n et la loi du couple (X_n, Y_n). Sont elles indépendantes ?

2) Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les lois de X_N et Y_N et la loi du couple (X_N, Y_N). .Sont elles indépendantes ?