Corrigé DS1 PC* 2023-24

problème 1 d'après e3A PC 2016

1) $x \in]-1,1[$

$\forall n \geq 1 \quad \left| \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right| \leq |x|^n \qquad \sum |x|^n$ converge car $|x|<1$

donc par comparaison $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge.

2) on pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$

(u_n) vérifie le TSSA car (u_n) est alternée, $(|u_n|) \downarrow$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\sum u_n$ converge.

3) appliquons la formule donnée dans le texte pour $x = -\frac{1}{2} \in]-1,1[$

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

4) $x \in]-1,1[$, $-x \in]-1,1[$, on change x en $-x$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

5) $x \in]-1,1[\quad \left|\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc $\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{(les 2 séries convergent)}$$

$$= -x\ln(1-x) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= -x\ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$$

on applique la formule précédente pour $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n+1}} = (1-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n}} = -\ln 2 + 1$$

6) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$w_{n+1} - w_n \sim -\frac{1}{2n^2} \quad (n \to +\infty)$$

$\sum \frac{1}{2n^2}$ converge

donc $\sum w_{n+1} - w_n$ converge

donc (w_n) converge.

on a donc $w_n = \gamma + o(1) \quad (n \to +\infty)$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad (n \to +\infty)$.

7) $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{1 \le 2p \le 2n} \frac{(-1)^{2p-1}}{2p} + \sum_{1 \le 2p+1 \le 2n} \frac{(-1)^{2p}}{2p+1}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}$$

on soustrait

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) \quad (n \to +\infty)$$

d'après 6)

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + o(1) \to \ln(2) \quad (n \to +\infty)$$

$n \to +\infty$ $\quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

donc par unicité de la limite : $\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2}$

8) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n\, 2^{2n+1} (n!)^2}$

$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ donc $a_n \sim \dfrac{\sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2 n\, 2^{2n+1}}$

$$a_n \sim \frac{2\sqrt{n\pi}\ \dfrac{2^{2n} n^{2n}}{e^{2n}}}{2n\pi\ \dfrac{n^{2n}}{e^{2n}}\ n\, 2^{2n+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n\pi}\, n}$$

$\underline{a_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}}$ $\quad \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\underline{\sum a_n \text{ converge}}$.

$U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$; $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$; $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$; $V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$

9) $U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$

$U_{k-1} - U_k = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} \quad (k \geq 1)$

10) $$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{U_{k-1}-U_k}{k}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k} \quad \text{(séries convergentes)}$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k}$$

$$= \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k}$$

$$= \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$$

---

11) $k \to +\infty \quad \frac{U_k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)2^k} = o\left(\frac{1}{k2^k}\right)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n_0 \quad 0 \leq \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \varepsilon \frac{1}{k2^k}$

$\forall n \geqslant n_0$

$\forall N \geqslant n+1 \qquad 0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k2^k}$

$N \to +\infty \quad \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0 \quad 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \varepsilon R_n$

donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n) \quad n \to +\infty$.

---

12) donc $\frac{U_n}{n+1} = R_n + o(R_n)$

donc $R_n \sim \frac{U_n}{n+1} \sim \frac{U_n}{n} \sim \frac{1}{n2^n}$

---

13) $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1}$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \, dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt \quad \text{(linéarité de } \textstyle\int)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 - S_n$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\right) dt = \ln 2 - S_n$$

$$\underbrace{\left[\ln(1+t)\right]_0^1}_{=\ln 2} - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \ln 2 - S_n$$

$$\Rightarrow S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

---

14) IPP : $u' = t^n$ $\quad u = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ $\qquad u, v$ C^1 sur $[0,1]$

$v = \frac{1}{1+t}$ $\quad v' = \frac{1}{(1+t)^2}$

$$S_n = (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(1+t)}\right]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)(1+t)^2} dt$$

$$S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} - \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt$$

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} \leq t^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt \to 0 \quad (n\to\infty)$$

donc $S_n = \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$\Rightarrow S_n \sim \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \sim \frac{(-1)^n}{2n}$$

---

15) Soit $\varepsilon > 0$

$a_k \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}} \qquad k\to\infty$

$2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}\,a_k \to 1 \quad (k\to\infty)$

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall k\geq n \quad |2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}a_k - 1| \leq \varepsilon$

$$-\varepsilon \leq 2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}a_k - 1 \leq \varepsilon$$

$$(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}} \leq a_k \leq (1+\varepsilon)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}$$

---

16) $t\mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^{3/2}} \qquad k\geq 2$

$\forall n\geq N,\ \forall p\geq n+1$

$$\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^{3/2}} \leq \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^{3/2}} \leq \sum_{k=n+1}^{p} a_k \leq \frac{(1+\varepsilon)}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\int_n^p\frac{dt}{t^{3/2}}$$

17) $p\to\infty$ $\displaystyle\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^{3/2}} = \left[\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\right]_{n+1}^{p+1} = -2\left[\frac{1}{\sqrt{p+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] \underset{p\to\infty}{\to} \frac{2}{\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle\int_n^p\frac{dt}{t^{3/2}} = -2\left[\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \to \frac{2}{\sqrt{n}} \quad p\to\infty.$

tous les termes convergent lorsque $p \to \infty$

donc par passage à la limite

$$\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{2}{\sqrt{n+1}} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \le \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

donc $\forall n \geq N \quad \dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \le T_n \le \dfrac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

$\forall n \geq N \quad \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}(1-\varepsilon) \le \sqrt{\pi}\sqrt{n}\, T_n \le 1+\varepsilon$

$\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 1 - \varepsilon \le \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 1\right) - \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \le \sqrt{\pi}\sqrt{n}\, T_n - 1 \le \varepsilon$

$\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 1 \to 0 \ (n \to +\infty)$

$\exists N' \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N' \quad \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 1 \geq -\varepsilon$

$|\sqrt{\pi}\sqrt{n}\, T_n - 1| \le 2\varepsilon$ pour $n \geq \operatorname{Sup}(N, N')$

donc $\sqrt{\pi}\sqrt{n}\, T_n \to 1 \ (n \to +\infty)$ donc $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \ (n \to +\infty)$

18) $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1} - U_k}{k(k+1)}$

$V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k(k+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$

$V_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{(k+1)(k+2)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$

$V_n = \displaystyle\frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right)$

$V_n = \displaystyle\frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2U_k}{k(k+1)(k+2)}$

En procédant comme à la question 12) on montre que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2U_k}{k(k+1)(k+2)} = o(V_n)$

donc $V_n \sim \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{U_n}{n^2} \sim \frac{1}{n^2 2^n}$

---

19) $R_n \sim \frac{1}{n 2^n}$ $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$ $T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ $V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}$

c'est (V_n) qui converge le + vite vers 0

car $V_n = o(R_n)$; $V_n = o(S_n)$ et $V_n = o(T_n)$

c'est (T_n) qui converge le moins vite vers 0

car $R_n = o(T_n)$; $S_n = o(T_n)$; $V_n = o(T_n)$.

donc c'est $\sum \frac{1}{k(k+1)2^k}$ qui converge le + vite (vers $1 - \ln 2$)

et c'est $\sum a_k$ qui converge le - vite (vers $\frac{\pi^2}{4} \ln 2$)

Problème 2 $\qquad F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

1) $F(0) = \int_0^1 dt = 1$

$F(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

2) $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$

$u = (1+t^2)^{-x} \qquad u' = 2t(-x)(1+t^2)^{-x-1}$

$v' = 1 \qquad v = t$

u, v C^1 sur $[0,1]$

$F(x) = \left[t(1+t^2)^{-x}\right]_0^1 + 2x\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{x+1}}dt$

$F(x) = \frac{1}{2^x} + 2x\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{x+1}}dt$

$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{x+1}}dt = \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{x+1}}dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x} - \int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^{x+1}}dt$

$= F(x) - F(x+1)$

donc $\quad F(x) = \frac{1}{2^x} + 2x(F(x) - F(x+1))$

ou encore $\quad 2x\,F(x+1) = (2x-1)F(x) + \frac{1}{2^x}$

pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad 2n\,F(n+1) = (2n-1)F(n) + \frac{1}{2^n}$

si $n \neq 0$ $\quad F(n+1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)F(n) + \frac{1}{n2^{n+1}}$

connaissant $F(1)$, on peut en déduire $F(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

et on connait $F(0)$

donc on peut calculer $F(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

pour $n \in \mathbb{N}$

$$(-2n)\,F(-n+1) = (-2n-1)\,F(-n) + \frac{1}{2^{-n}}$$

$$-(2n+1)\,F(-n) = -2n\,F(-n+1) + \frac{1}{2^{-n}}$$

$2n+1 \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc connaissant $F(0)$, on en déduit $F(-n)$
par récurrence sur n.

$$-3\,F(-1) = -2\,F(0) + \frac{1}{2^{-1}} = -2+2 = 0$$

$\underline{F(-1) = 0}$

$$F(2) = \left(1-\frac{1}{2}\right)F(1) + \frac{1}{2^2}$$

$$F(2) = \frac{1}{2}F(1) + \frac{1}{4} = \underline{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = F(2)}$$

3) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad x_1 \leq x_2 \implies (1+t^2)^{x_1} \leq (1+t^2)^{x_2}$

$$\implies \frac{1}{(1+t^2)^{x_2}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^{x_1}} \implies F(x_2) \leq F(x_1)$$

par croissance de l'intégrale

donc $\underline{F \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}}$

4) $x < 0$ $\quad$ posons $g(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^x} = e^{-x\ln(1+t^2)} = (1+t^2)^{-x}$

g est dérivable sur $[0,1]$

$$g'(t) = (-x)(2t)(1+t^2)^{-x-1} \geq 0$$

g est croissante sur $[0,1]$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^x} = \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-x}$$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x} \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x} \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 g\left(\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^{-x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$$

donc $\underline{F(x) \to +\infty \quad (x \to -\infty)}$

5) $h(t) = \ln(1+t^2) - \frac{1}{2}t^2$

h est dérivable sur $[0,1]$

$$h'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - t = \frac{2t - t(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{t-t^3}{(1+t^2)} = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \geq 0 \text{ sur } [0,1]$$

h est $\nearrow$ sur $[0,1]$ $\quad h(0)=0$

donc $\forall t \in [0,1] \quad h(t) \geq 0$

$\forall t \in [0,1] \quad \ln(1+t^2) \geq \frac{1}{2}t^2$

$$f(x) = \int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}\,dt \leq \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2}\,dt$$

6) $\varphi(x) = \int_0^x e^{-u^2/2}\,du$

a) $\forall x \in [1,+\infty[\quad \forall u \in [1,x] \quad u^2 \geq u$

$e^{-u^2/2} \leq e^{-u/2}$ donc $\int_1^x e^{-u^2/2}\,du \leq \int_1^x e^{-u/2}\,du$

$$\int_1^x e^{-u^2/2}\,du \leq \left[-2e^{-u/2}\right]_1^x = -2e^{-x/2} + 2e^{-1/2}$$

donc $\forall x \in [1,+\infty[\quad \int_1^x e^{-u^2/2}\,du \leq 2e^{-1/2}$

donc $\forall x \in [1,+\infty[\quad \varphi(x) \leq \int_0^1 e^{-u^2/2}\,du + 2e^{-1/2}$

φ est bornée sur $[1,+\infty[$.

et si $x \in [0,1] \quad \varphi(x) \leq \int_0^1 e^{-u^2/2}\,du$

donc φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$

---

b) $\varphi(x) = \int_0^x e^{-u^2/2}\,du \qquad \varphi(\sqrt{x}) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2/2}\,du$

changement de variable $\quad t = \frac{u}{\sqrt{x}} \qquad dt = \frac{du}{\sqrt{x}}$

$$\varphi(\sqrt{x}) = \int_0^1 e^{-x\frac{t^2}{2}}\sqrt{x}\,dt = \sqrt{x}\int_0^1 e^{-x\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

si $x > 0 \quad \int_0^1 e^{-x\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \to 0 \ (x \to \infty)$ car φ bornée donc d'après 5) , comme $F(x) \geq 0$

on a $F(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$

7) a) inégalité de TL pour exp (qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |f(x) - f(0) - x f'(0)| \leq \frac{x^2}{2} \sup_{t\in[0,x] \text{ ou } t\in[x,0]} |f''(t)|$

$f(x) = e^x$ $\quad f''(t) = e^t$

si $x \geq 0$ $\quad \sup_{t\in[0,x]} |f''(t)| = e^x \leq e^x = e^{|x|}$

si $x \leq 0$ $\quad \sup_{t\in[x,0]} |f''(t)| = 1 \leq e^{-x} = e^{|x|}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$

b) donc $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall h \in [-1,1]$ $\forall t \in [0,1]$

$$\left| e^{-h\ln(1+t^2)} - 1 + h\ln(1+t^2) \right| \leq \frac{h^2}{2} (\ln(1+t^2))^2 e^{|h|\ln(1+t^2)}$$

on multiplie par $e^{-x_0 \ln(1+t^2)}$

$$\left| e^{-(x_0+h)\ln(1+t^2)} - e^{-x_0\ln(1+t^2)} + h\ln(1+t^2) e^{-x_0 \ln(1+t^2)} \right|$$

$$\leq \frac{h^2}{2} (\ln(1+t^2))^2 e^{\ln(1+t^2)} e^{-x_0\ln(1+t^2)} \quad \text{car } |h| \leq 1$$

en intégrant entre 0 et 1 et en utilisant $|\int| \leq \int| |$

on obtient

$$|F(x_0+h) - F(x_0) - h\, g(x_0)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^2 (1+t^2)}{(1+t^2)^{x_0}} dt$$

en utilisant $1+t^2 \leq 2$

on obtient bien

$$|F(x_0+h) - F(x_0) - h\, g(x_0)| \leq h^2 \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^2}{(1+t_0)^{x_0}} dt$$

c) pour $h \neq 0$

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - g(x_0) \right| \leq h \underbrace{\int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^2}{(1+t_0^2)^{x_0}} dt}_{\to 0 \ (h \to 0)}$$

donc $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \to g(x_0) \quad (h \to 0)$

donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = g(x_0)$

c'est vrai $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\underline{F' = g}$ $\quad g \leq 0$ donc $F \downarrow$.

$F'(0) = g(0) = -\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$

IPP : $u = \ln(1+t^2) \qquad u' = \frac{2t}{1+t^2}$

$v' = 1 \qquad v = t$

u, v C^1 sur $[0,1]$

$$F'(0) = -\left[t\ln(1+t^2) \right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$= -\ln 2 + 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = -\ln 2 + 2 - 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -\ln 2 + 2 - 2 \times \frac{\pi}{4} = \underline{-\ln 2 + 2 - \frac{\pi}{2}}$$

8) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = F(u_n)$

a) Soit $k(x) = F(x) - x$

k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = F'(x) - 1 < 0$ car $F'(x) \leq 0$

donc k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$k(0) = F(0) = 1 \qquad k(1) = F(1) - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$

k est continue donc $\exists! \ell \in \mathbb{R}, k(\ell) = 0$

et $\ell \in]0,1[$ car $k(0) > 0$ et $k(1) < 0$

b) $F([0,1]) = [F(1), F(0)] = [\frac{\pi}{4}, 1] \subset [0,1]$

$[0,1]$ est stable par F et $u_0 \in [0,1]$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,1]$

c) $\forall x \in [0,1]$ $|F'(x)| = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^x} dt$

$\ln(1+t^2) \leq \ln 2$ et $\frac{1}{(1+t^2)^x} \leq 1$ donc $|F'(x)| \leq \ln 2$

$\forall x \in [0,1]$

d) d'après l'inégalité des accroissements finis :

$\forall (x,y) \in [0,1]$ $|F(x) - F(y)| \leq (\ln 2)|x-y|$

pour $x = u_n$ et $y = \ell$ $|F(u_n) - F(\ell)| \leq (\ln 2)|u_n - \ell|$

$|u_{n+1} - \ell| \leq (\ln 2)|u_n - \ell|$

et par récurrence $\forall n$ $|u_n - \ell| \leq (\ln 2)^n |u_0 - \ell| \to 0$ $(n \to +\infty)$

car $|\ln 2| < 1$

donc $\underline{u_n \to \ell}$ $(n \to +\infty)$

problème 3 d'après Petites Mines 1998

$\forall t \in \mathbb{R}^*\ \varphi(t) = \dfrac{1}{t+\sin t}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin t}$

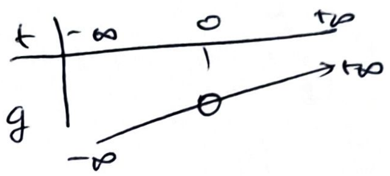
1) $\Leftarrow$ si $t=0$ alors $\sin t + t = 0$

$\Rightarrow$ posons $g(t) = \sin t + t$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(t) = \cos t + 1 \geqslant 0$

g est $\nearrow$ stricte et $g(0)=0$



g est continue sur $\mathbb{R}$

d'après le th de la bijection $\exists !\, t \in \mathbb{R},\ g(t)=0$

$t=0$ vérifie cela donc par unicité

$g(t)=0 \Rightarrow t=0$

2) φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}^*$

si $x>0$ $\quad 0 \notin [x, 2x]$ donc $f(x)$ existe

si $x<0$ $\quad 0 \notin [2x, x]$ donc $f(x)$ existe

donc <u>f est définie sur $\mathbb{R}^*$</u>

$f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t+\sin t}$ $\qquad$ changement de var : $u=-t$

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{(-du)}{-u-\sin u} = \int_x^{2x} \frac{du}{u+\sin u} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

<u>f est paire</u>

3) Soit F une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sin t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f(x) = F(2x) - F(x)$

F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc f aussi

et $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2\dfrac{1}{2x+\sin 2x} - \dfrac{1}{x+\sin x}$

$$f'(x) = \frac{2(x+\sin x) - (2x+\sin 2x)}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)} = \frac{2\sin x - \sin 2x}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = \dfrac{2\sin x - 2\sin x \cos x}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = \dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad x+\sin x > 0$ (voir 1))

$2x+\sin 2x > 0$

$1-\cos x \geqslant 0$

le signe de $f'(x)$ est donc du signe de $\sin x$

$\forall x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ $\quad f'(x) \geqslant 0$ $\quad (k \in \mathbb{N})$ $\quad f$ est $\nearrow$

$\forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ $\quad f'(x) \leqslant 0$ $\quad (k \in \mathbb{N})$ $\quad f$ est $\searrow$.

4) $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t}\right| = \left|\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+\sin t} - \frac{1}{t}\right) dt\right|$

$= \left|\int_x^{2x} \frac{-\sin t}{t(t+\sin t)} dt\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{|\sin t|}{t(t+\sin t)} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t+\sin t)}$

5) $t+\sin t \to +\infty$ $\quad (t \to +\infty)$ car $\sin t$ est borné.

$\frac{t}{2} + \sin t \to +\infty$ $\quad (t \to +\infty)$ idem

donc $\exists m \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \geqslant m$ $\quad \frac{t}{2} + \sin t \geqslant 0$

on a donc $\forall t \geqslant m$ $\quad t+\sin t \geqslant \frac{t}{2}$. Si $x \geqslant m$ alors $t \in [x, 2x]$
$t \geqslant m$

$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t+\sin t)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{2\,dt}{t^2} = \left[-\frac{2}{t}\right]_x^{2x} = \frac{-2}{2x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$

donc $\quad \exists m \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \geqslant m$ $\quad |f(x) - \ln 2| \leqslant \frac{1}{x}$

(car $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$)

donc $\underline{f(x) \to \ln 2 \quad (x \to +\infty)}$

6) on pose $\forall t \in \mathbb{R}^*$ $\quad g(t) = \dfrac{1}{t+\sin t} - \dfrac{1}{2t}$

$$g(t) = \frac{2t - t - \sin t}{2t(t+\sin t)} = \frac{t-\sin t}{2t(t+\sin t)} = \frac{t-(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3))}{2t(t+t-\frac{t^3}{6}+o(t^3))}$$

$$g(t) = \frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{4t^2+o(t^3)} = \frac{1}{24}\,\frac{t+o(t)}{1+o(t)} = \frac{1}{24}(t+o(t))(1+o(t))$$

$$\underline{g(t) = \frac{1}{24}t + o(t) \quad (t \to 0)}$$

g admet bien un DL d'ordre 1 en 0

en particulier g est prolongeable en 0 et $g(0)=0$

7) g ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$

donc admet une primitive G.

$$G(t) = G(0) + \frac{1}{48}t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

~~pour~~ considérons $\displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+\sin t} - \frac{1}{2t}\right)dt = \int_x^{2x} g(t)\,dt$

$$= G(2x) - G(x)$$

$$= G(0) + \frac{1}{48}4x^2 + o(x^2) - \left(G(0) + \frac{1}{48}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{3}{48}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)$$

mais $\displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt = f(x) - \int_x^{2x}\frac{dt}{2t} = f(x) - \frac{1}{2}\ln 2$

donc $\underline{f(x) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{16}x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0)}$

ainsi f est prolongeable en 0 et la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 (car f admet un DL d'ordre 1 en 0)

$f(0) = \frac{1}{2}\ln 2 \qquad f'(0) = 0$

$$f(x) - \frac{1}{2}\ln 2 \sim \frac{1}{16}x^2 \geq 0$$

la courbe de f est au-dessus de sa tangente en 0

8) $$f'(x) = \frac{2\sin x\,(1-\cos x)}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)}$$

$$x+\sin x = x + x + o(x) = 2x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x$$

$$2x + \sin 2x = 2x + 2x + o(x) = 4x + o(x) \underset{0}{\sim} 4x$$

$$1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{et } \sin x \underset{0}{\sim} x$$

donc $$f'(x) \sim \frac{2x\,\frac{x^2}{2}}{4x \times 2x}$$

$$\underline{f'(x) \underset{0}{\sim} 8x}$$

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{f'(x)}{x} \to 8 \quad (x\to 0)$$

donc f' est dérivable en 0

donc f est 2 fois dérivable en 0

et $\underline{f''(0)=8}$

(compatible avec le DL_2 de f d'ordre 2

le terme en x^2 admet comme coefficient $\frac{f''(0)}{2}$

si f est 2 fois dérivable en 0)