PC* 2024-2025

Programme de colle N°1 : semaine du 16 septembre au 21 septembre

Développements limités et recherche d'équivalents

-Révision du programme de PCSI

Séries numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

-Convergence d'une série , si la série converge , le terme général tend vers 0 , le reste tend vers 0 .La convergence d'une série à valeurs complexe équivaut à la convergence des séries des parties réelles et imaginaires .Convergence d'une série géométrique . La convergence d'une suite (u_n) équivaut à la convergence de la série $\sum u_{n+1} - u_n$

-Propriétés des séries à termes positifs : Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (ou si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$) et si $\sum v_n$ converge , alors $\sum u_n$ converge . Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature . Convergence des séries de Riemann .Règle de d'Alembert .

-Séries absolument convergentes . Une série complexe est absolument convergente ssi les séries de ses parties réelles et imaginaires sont absolument convergentes .Une série absolument convergente est convergente .

-Produit de Cauchy de deux séries . Si les deux séries convergent absolument , leur produit de Cauchy aussi .

-Séries alternées : Théorème spécial des séries alternées , signe du reste et majoration du reste

-Formule de Stirling (admise pour l'instant)

-Encadrement d'une série par des intégrales (le th de comparaison série-intégrale n'est plus au programme, on se contente d'une technique d'encadrement)

-Séries de Bertrand (on peut interroger les élèves sur des exemples)

-Transformation d'Abel (hors programme mais traité tout de même)

Questions de cours

- Pour des séries à termes positifs , si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (ou si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$) et si $\sum v_n$ converge , alors $\sum u_n$ converge
- Convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
- Convergence de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ (vers la constante d'Euler)

-Théorème spécial des séries alternées (démonstration de la convergence de la série uniquement)

- Equivalent de u_n et convergence de $\sum u_n$ avec $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$

A suivre : intégration sur un segment