PC* 2024-2025

Programme de colle N°3 : semaine du 30 septembre au 5 octobre

*Intégration sur un segment
Révision du programme précédent

*Intégrales généralisées
-Définition d'une intégrale impropre convergente pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle du type $[a,b[$; $]a,b]$ ou $]a,b[$ avec a et b éventuellement infinis .
Pour une fonction à valeurs complexes , l'intégrale de f converge ssi les intégrales des parties réelles et imaginaires de f convergent .
-Théorème de comparaison pour les fonctions positives sur $[a,b[$:Si $f \leq g$ (resp $f = O(g)$, resp $f = o(g)$) au vois de b et l'intégrale de g converge alors l'intégrale de f converge .Si $f \sim g$ au vois de b alors l'intégrale de f et celle de g sont de même nature
Idem pour des fonctions positives sur $]a,b]$
-Intégrales de référence : intégrales de Riemann (au vois de 0 et de $+\infty$) , $\int_0^1 \ln x\, dx$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$.
-Linéarité , croissance , Chasles. Intégration par parties , changement de variable .
-Intégrales absolument convergentes . Une intégrale absolument convergente est convergente
Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque .Inégalité triangulaire. Espace vectoriel $L^1(I,K)$

*Questions de cours

1) Formule de Taylor avec reste intégral

2) Convergence de l'intégrale de Riemann au voisinage de 0 et de l'infini

3) Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} dx$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$. Montrer qu'elle converge et la calculer

5) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$. Montrer que I converge et la calculer par changement de variable $t = \frac{1}{x}$

A suivre : convergence dominée, révisions d'algèbre