PC* 2024-2025

Programme de colle N°4 : semaine du 7 octobre au 12 octobre

*Intégration sur un intervalle quelconque et théorème de convergence dominée
-Révision du programme précédent (intégrale impropre, th de comparaison, intégrales de référence, notamment intégrale de Riemann, intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables, intégration par parties et changement de variables)
-Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions

*Révisions d'algèbre de PCSI
-Nombres complexes
-Ensembles , applications (notamment injectivité , surjectivité)
-Polynômes

*Révision d'algèbre linéaire de PCSI (sauf déterminants)
-Espaces vectoriels , sous espaces vectoriels , somme de 2 sev , familles libres , génératrices , bases , dimension , applications linéaires
-Image et noyau d'une application linéaire .Théorème d'isomorphisme : pour $f \in L(E,F)$ et S un supplémentaire de $Kerf$ dans E , la restriction de f à S définit un isomorphisme de S dans $\operatorname{Im} f$
-Rang d'une application linéaire, th du rang
-Hyperplan de E en dimension finie . Caractérisation comme noyau d'une forme linéaire non nulle . Equation d'un hyperplan en dimension finie .
-Matrice d'une application linéaire , formules de changement de bases
-Matrices semblables
-Trace d'une matrice carrée, propriétés de la trace

Remarque : pas encore projections et symétries, pas encore les déterminants

*Questions de cours
1) Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ et calcul par changement de variable $t = \frac{1}{x}$

2) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x\left(1+x^2\right)} dx$

3) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f = f \circ f \circ f$. Montrer que f est surjective si et seulement si f est injective .

4) Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P = (X+1)^n - (X-1)^n$,

5) En admettant que $(X+1)^n - (X-1)^n = 2\,n \prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i \cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ (question précédente)

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

6) Soit $P \in K[X]$ et $a \in K$ avec $P'''(a) \neq 0$. Soit $Q = \frac{1}{2}(X-a)[P' + P'(a)] + P(a) - P$

Montrer que a est une racine de Q et trouver son ordre de multiplicité .

A suivre : compléments d'algèbre linéaire