PC* 2024-2025

Programme de colle N°5 : semaine du 14 octobre au 18 octobre

Révision d'algèbre linéaire de PCSI (sauf déterminants)

-Espaces vectoriels , sous espaces vectoriels , somme de 2 sev , familles libres , génératrices , bases , dimension , applications linéaires

-Image et noyau d'une application linéaire .Théorème d'isomorphisme : pour $f \in L(E,F)$ et S un supplémentaire de $Kerf$ dans E , la restriction de f à S définit un isomorphisme de S dans $\operatorname{Im} f$

-Rang d'une application linéaire, th du rang

-Hyperplan de E en dimension finie . Caractérisation comme noyau d'une forme linéaire non nulle . Equation d'un hyperplan en dimension finie .

-Matrice d'une application linéaire , formules de changement de bases

-Matrices semblables

- Trace d'une matrice carrée, propriétés de la trace, invariance par changement de bases, trace d'un endomorphisme

-Projections et symétries

Compléments d'algèbre linéaire (sauf déterminants)

-Produit d'espaces vectoriels , dimension du produit

-Somme et somme directe de n sous espaces vectoriels .En dimension finie , dimension d'une somme directe .Pour une somme quelconque , majoration de la dimension de la somme par la somme des dimensions et égalité ssi la somme est directe .Base adaptée à un sev

Recollement de bases. Base adaptée à une décomposition de E en somme directe.

-La trace d'un projecteur est égale à son rang

- Polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de n+1 scalaires distincts. Existence et unicité d'un polynôme de $K_n[X]$ qui prend des valeurs fixées en n+1 points distincts.

- Notation en blocs des matrices

-Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit sur un sous espace stable. Caractérisation d'un sous espace vectoriel stable par le fait que la matrice de l'endomorphisme associé dans une base adaptée soit triangulaire par blocs.

-Endomorphismes nilpotents (hors programme). En dimension finie, l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

Remarque : pas encore les déterminants

Questions de cours

1) Soit $f \in L(E)$ tel que $f^3 = f$, montrer que $E = Kerf \oplus Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$

2) Propriétés de la trace : linéarité et $tr(AB) = tr(BA)$

3) La trace d'un projecteur est égale à son rang

4) Soient $(a_0,\ldots,a_p) \in K^{p+1}$ deux à deux distincts et $(b_0,\ldots,b_p) \in K^{p+1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $K_p[X]$ qui vérifie $\forall j \in [\![0,p]\!] \quad P(a_j) = b_j$. Comment s'exprime-t-il en fonction des polynômes de Lagrange ?

5) Si f et g commutent alors $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g (f et g appartenant à $L(E)$)

A suivre : Déterminants, suites de fonctions