PC* 2024-2025

Programme de colle N°6 : semaine du 4 novembre au 8 novembre

*Rappels et compléments d'algèbre linéaire
- Somme et somme directe de p sous espaces vectoriels
-Matrices semblables
-Trace d'une matrice carrée, propriétés de la trace
-La trace d'un projecteur est égale à son rang
-Polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de n+1 scalaires distincts. Existence et unicité d'un polynôme de $K_n[X]$ qui prend des valeurs fixées en n+1 points distincts.
-Notation en blocs des matrices
-Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit sur un sous espace stable. Caractérisation d'un sous espace vectoriel stable par le fait que la matrice de l'endomorphisme associé dans une base adaptée soit triangulaire par blocs.
-Endomorphismes nilpotents (hors programme). En dimension finie, l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

*Déterminants :Révisions et compléments
-Déterminant d'un système de vecteurs dans une base, déterminant d'une matrice, déterminant d'un endomorphisme, calcul par opérations du pivot de Gauss, développement par rapport à une ligne ou une colonne
-Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
-Déterminant de Vandermonde, en particulier déterminant de la base canonique de $K_n[X]$ dans la base formée des polynômes de Lagrange.

*Questions de cours
1) Soit $f \in L(E)$ tel que $f^3 = f$, montrer que $E = Kerf \oplus Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$
2) Propriétés de la trace : linéarité et $tr(AB) = tr(BA)$
3) La trace d'un projecteur est égale à son rang
4) Soient $(a_0,\dots,a_p) \in K^{p+1}$ deux à deux distincts et $(b_0,\dots,b_p) \in K^{p+1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $K_p[X]$ qui vérifie $\forall j \in [\![0,p]\!]\quad P(a_j) = b_j$. Comment s'exprime-t-il en fonction des polynômes de Lagrange ?
5) Si f et g commutent alors $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g (f et g appartenant à $L(E)$)
6) Déterminant de Vandermonde

A suivre : Suites et séries de fonctions