PC* 2024-2025
Programme de colle N°7 : semaine du 12 novembre au 15 novembre

*Déterminants :Révisions et compléments
-Déterminant d'un système de vecteurs dans une base, déterminant d'une matrice, déterminant d'un endomorphisme, calcul par opérations du pivot de Gauss, développement par rapport à une ligne ou une colonne
-Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
-Déterminant de Vandermonde, en particulier déterminant de la base canonique de $K_n\left[X\right]$ dans la base formée des polynômes de Lagrange.

*Suites de fonctions et début des séries de fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
-Suites de fonctions : convergence simple ,révision du théorème de convergence dominée
Convergence uniforme . Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues , interversion limite intégrale , th de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1 , extension aux fonctions de classe C^k
-Séries de fonctions : convergence simple , convergence uniforme, convergence normale, uniforme sur tout segment, normale sur tout segment
-Continuité de la somme
-Théorème de la double limite : Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur un intervalle I , a étant une borne de I (éventuellement infinie). Supposons que $\forall n \quad f_n$ admet une limite finie l_n en a alors $\sum l_n$ converge et $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$
-Révision de la technique d'encadrement d'une série par des intégrales

Remarque : Pas encore la dérivation terme à terme d'une série de fonctions Pas encore les théorèmes d'intégration terme à terme. Pour les calculs de limites ou d'équivalents, on peut utiliser le th de la double limite ou l'encadrement par des intégrales suivant les circonstances.

*Questions de cours
1) Déterminant de Vandermonde

2) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions

$f_n:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x+n}{n+4nx^2}$. Puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n\left(t\right)dt$

3) On pose $f_n\left(x\right)=\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n+x^2}$. Etudier la convergence simple , normale et uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$

4) Soit $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-(n-1)x}}{n}$. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$

5) Soit $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ .Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$

6) Soit $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

A suivre : Encore les séries de fonctions , début des espaces vectoriels normés