Révisions : Suites ,comparaison des suites et des fonctions

1) 1) Théorème de Césaro : soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle ou complexe convergeant vers l et $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ .Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers l (étudier d'abord le cas où $l=0$)

2) Application : : Soit $(u_n)_{n\in N}$ telle que $\forall n \quad u_n > 0$ .On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in N}$ converge vers $\lambda > 0$ .Montrer que $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers λ (on passera au logarithme) .Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

2) Soit (u_n) définie par la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin u_n$ .Déterminer la limite de (u_n) ; en considérant $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ et en appliquant Césaro , déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists ! x_n \in \mathbb{R} \quad x_n - e^{-x_n} = n$ .Montrer que $x_n \in [n ; n+1]$. Donner un équivalent et un développement asymptotique d'ordre 2 de $x_n - n$ en $+\infty$

4) Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

1) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes .
2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$
3) Montrer que e est irrationnel

5) Soit $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ .Soit la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 > 0$

1) Déterminer l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$
2) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad u_n \geq 2$
3) Majorer $|f'(x)|$ sur $[2, +\infty[$ et en déduire que f est lipschitzienne sur $[2, +\infty[$
4) Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in N}$

6) Soit f définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Arc\tan x + e^x - 1$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser, que sa réciproque est C^∞ sur I , que f admet un développement limité à tout ordre en 0 et déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de f^{-1}

7) Déterminer DL d'ordre 2 en 0 de $\frac{1 - chx}{1 - \cos x}$

8) Déterminer un équivalent en 0 de $e^x - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2x} - 1$

9) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$

10) Déterminer (presque) sans calcul un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de :

a) $\ln(\ln n) - 2\ln n + \dfrac{\ln n}{n}$

b) $\dfrac{e^n}{n!} + \dfrac{1}{\ln n}$

11) DL à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = Arc\tan(e^x)$

12) Asymptote et position par rapport à l'asymptote en $+\infty$ de $f(x) = x^2\, Arc\tan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

13) Déterminer $\lim\limits_{x\to e^-} (\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right)}$

14) Inégalité de Jensen (pour une fonction convexe)

a) Soit f une application convexe sur un intervalle I

Soient $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Montrer que $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i)$ (*)

Indication : on procèdera par récurrence sur n . Pour l'hérédité (passage du rang n au rang n+1), poser $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, appliquer l'inégalité de convexité avec les coefficients S et $1-S$

b) Que donne l'inégalité (*) pour une fonction concave ?

c) Application : Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i \geq \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}$. En particulier justifier que $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$.