Séries numériques

1) Etudier la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous (avec $\alpha \in \mathbb{R}$)

1) $u_n = \dfrac{n}{4^n}$ 2) $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3 + \dfrac{3}{2}n^2}$. 3) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(Arc\tan n - 2\arctan\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$

4) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^{n^\alpha}$ 5) $u_n = \dfrac{1}{\ln n + (-1)^n n^{1/2}}$

6) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 7) $u_n = \dfrac{(3n)!}{a^{3n}(n!)^3}$; $a > 0$ 8) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+i}$ 9) $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+\alpha^2}\right)$

10) $u_n = A\text{rccos}\left(\exp\left(-n^\alpha\right)\right)$

2) Soit $p(n)$ le nombre de chiffres de n dans son écriture en base 10 .Etudier la série $\sum \dfrac{p(n)}{n(n+1)}$

3) Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$ 2) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

4) Groupement de termes : nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} n}$

5) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et calculer sa somme (on pourra séparer les termes pairs et impairs à partir de la somme partielle d'indice pair)

6) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la série de terme général $u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$ converge .Calculer alors cette somme .

7) Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = a^{S_n}$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $a > 0$.

8) Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et que sa somme S est un irrationnel (on pourra procéder par l'absurde, écrire $S = S_n + R_n = \dfrac{p}{q}$ et montrer qu'à partir d'un certain rang $\left|q(2n+1)!R_n\right| < 1$)

9) Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^\alpha}\right)$

10) Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs . On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$ où la série $\sum v_n$ est absolument convergente et $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

Montrer que l'on peut écrire $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{\alpha}{n} + w_n$ avec $\sum w_n$ absolument convergente .

En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

En déduire la nature de la série $\sum u_n$. Application : nature de la série $u_n = \frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}$

11) Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante telle que $\sum u_n$ converge . Montrer $\lim_{n\to+\infty} n u_n = 0$

Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge

12) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs pour laquelle il existe $\alpha > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$. Montrer que $\sum u_n$ converge . Ex : $u_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)(2n+1)}$

13) Produit de Cauchy : Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .Montrer que la série $\sum u_n$ converge . soit $\sum v_n$ le produit de Cauchy de $\sum u_n$ avec elle-même . Montrer que $\sum v_n$ diverge .

14) En encadrant $\sum_{k=1}^{n} \ln k$ par des intégrales, montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \to -1 \quad (n \to +\infty)$

En déduire que $(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e} \quad (n \to +\infty)$

Peut-on retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stirling ?