Intégration sur un segment

1) Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{8k^3+n^3}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\,Arc\tan\left(\dfrac{k}{n}\right)$

2) Calculer $\int_0^{3.5} x^{\lfloor x\rfloor}dx$

3) Calculer a) $\int_0^1 x^2 e^{x^3}dx$ b) $\int_0^1 \dfrac{e^x}{2+e^x}dx$ c) $\int_0^1 \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^4}dx$

4) Calculer a) $\int^X \dfrac{x\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$ b) $\int^X \dfrac{(-x+1)\,dx}{x^2+2x+2}$ c) $\int_0^{\pi/4}\dfrac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$ (changement de variable $t=\cos x$) d) $\int_0^1\dfrac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}$ (changement de variable $t=\sqrt{1+x}$)

5) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1) Calculer I_0 , I_1

2) Montrer que pour $n\geq 1$, $2I_n+nI_{n-1}=e^2$

3) Montrer que pour tout n , $I_{n+1}\leq I_n$ et que $0\leq I_n$

4) En déduire que pour $n\geq 1$, $0\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

6) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt=l$

7) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x)=\dfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt$ si $x\neq 0$ et $g(0)=f(0)$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$

1) Montrer que g est continue en 0 (écrire g à l'aide de 2 taux d'accroissement)
2) Supposons que f est dérivable en 0 .Ecrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 1 .En déduire un développement limité de F en 0 puis un développement limité de g en 0 .En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la valeur de $g'(0)$.

8) Soit $f(x)=\int_0^{\sin^2 x} Arc\sin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x} Arc\cos\sqrt{t}\,dt$. Etudier f .

9) Trouver le minimum de $\int_0^1 f''^2$ quand f décrit l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=f(1)=0$ et $f'(1)=1$

Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz à $\int_0^1 x f''(x)dx$

10) On pose $g(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$. On définit $f(x)=y$ si $\int_x^y e^{t^2}\,dt=1$ .Exprimer f à l'aide de g .Etudier f : continuité, dérivabilité limites en $+\infty$ et $-\infty$, équivalent en $+\infty$ (on montrera que pour $x>0 \quad x\le f(x)\le x+1$)

11) Soit $f\in C^2([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a<b$) . Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt-\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right|\le\frac{(b-a)^3}{12}\sup_{t\in[a,b]}\left|f''(t)\right|$$

Indication : appliquer Taylor reste intégral à la fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt-\frac{x-a}{2}\big(f(x)+f(a)\big)$

Quelle majoration obtient t'on en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange ?

12) X-ENS Soit f une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 , strictement croissante telle que $f(0)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .Soit $a>0$ et $b>0$.

3) Montrer que $a\,f(a)=\int_0^a f(t)\,dt+\int_0^{f(a)}f^{-1}(t)\,dt$

4) En déduire que $a\,b\le\int_0^a f(t)\,dt+\int_0^b f^{-1}(t)\,dt$