Intégrales impropres , convergence dominée

1) Pour α un réel donné , étudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(1+x)\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\left(\ln x-\ln\left(1-e^{-x}\right)\right)dx$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}dx$ e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha-1}{\ln x}dx$ f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+x}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)dx$

2) Prouver l'existence et déterminer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\,dt$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{chx}dx$ e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{Arc\tan x}{x^3}dx$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$ g) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$

3) On pose $\forall x\in\left]-1,+\infty\right[\quad f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \varphi(x)=\displaystyle\int_{x-1}^{x}\ln\left(f(u)\right)du$

a) Montrer que f est définie et strictement positive sur $\left]-1,+\infty\right[$.On admet qu'elle est continue sur cet intervalle

b) Déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$

c) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $\varphi'(x)$ et en déduire une expression de $\varphi(x)$

d) On admet que $\forall x\geq 2\quad \varphi(x)>0$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$

4) 1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ converge (faire une IPP sur $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$)

2) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$ converge

On veut montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ diverge

3) Par l'absurde supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ converge . Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ converge

puis obtenir une contradiction avec 2)

5) Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx$ pour $n \geq 1$ Montrer que l'intégrale I_n existe , déterminer sa limite lorsque $n \to +\infty$ et effectuer un développement asymptotique de I_n quand $n \to +\infty$ à la précision $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

6) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue , décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$ .Montrer que $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$ et que f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$ (on pourra considérer $F(x) = \int_{x/2}^{x} f(t)\, dt$)

7) Posons $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$? Montrer que $f(x) \sim -\ln x \quad \left(x \to 0^+\right)$

8) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x\left(1+x^2\right)} dx$

9) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ puis un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1 \frac{du}{1+u^n} - 1$

10) Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_0^1 \frac{n}{1+n^2 x^2} f(x)\, dx$

11) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin x\, dx$