Révisions d'algèbre et d'algèbre linéaire

1 Déterminer module et argument de $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$.

3 Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$

4 Soit $a=e^{2i\pi/5}$. On pose $z_1=a+a^4$ et $z_2=a^2+a^3$. Calculer z_1+z_2 et z_1z_2. En déduire z_1 et z_2 à l'ordre près. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

5 Trouver les nombres complexes z tels que les points d'affixe $1, z, 1+z^2$ soient alignés

6 Soit E un ensemble et $f:E\to E$ telle que $f=f\circ f\circ f$. Montrer que f est surjective si et seulement si f est injective .

7 Soit $f:E\to F$ une application. $A_1, A_2\subset E$ *et* $B_1, B_2\subset F$ Montrer que

1) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$
2) $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$
3) $f\ \textit{est injective}\Rightarrow \forall A_1, A_2\in P(E)\ f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$
4) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

8 Polynômes de Tchebychev :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que $\forall\theta\in\mathbb{R}\quad P_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$

Montrer que $P_0=1$, $P_1=X$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad P_{n+2}=2XP_{n+1}-P_n$

Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n. Factoriser P_n.

9 Déterminer le reste de la division euclidienne de $A=(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $B=(X-2)^2$

10 Soit $P\in K[X]$ et $a\in K$ avec $P'''(a)\neq 0$. Soit $Q=\frac{1}{2}(X-a)[P'+P'(a)]+P(a)-P$

Montrer que a est une racine de Q et trouver son ordre de multiplicité .

11 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X-1)$

1) Montrer que si a est racine de P alors a^2 aussi . En déduire $a=0$ ou $|a|=1$.
2) Montrer que 0 n'est pas racine de P .Montrer que si a est racine de P alors $|a+1|=1$.
3) En déduire les racines de P et la factorisation de P .

12 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P=(X+1)^n-(X-1)^n$, en déduire $\prod_{k=1}^{n-1}\cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n-1}\cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

13 Soit $a\in\mathbb{R}$ .Déterminer le rang du système de vecteurs :

$u_1=(4-a,-6,2)$ $u_2=(1,-1-a,1)$ $u_3=(-1,2,1-a)$

14 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in L(E)$

Montrer que $Kerf=Kerf^2 \quad \Leftrightarrow \quad E=Kerf\oplus \operatorname{Im} f$

15 Soit E un espace vectoriel de dimension n ***et*** $f,g\in L(E)$

1) Montrer que $\operatorname{Im}(f+g)\subset \operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g$. En déduire que $rg(f+g)\leq rg(f)+rg(g)$

2) Supposons que $f\circ g=0$ et $f+g$ est bijective .

a) Montrer que $\operatorname{Im} g\subset Kerf$

b) Montrer que $rg(f)+rg(g)\leq n$ puis $rg(f)+rg(g)=n$

c) En déduire $\operatorname{Im} g=Kerf$

22 Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\geq 3$. Soit $P_k=(X-1)^k$ (k variant de 0 à n) et φ définie sur E par :

$\forall P\in E \quad \varphi(P)=(X-1)^2P''-2(X-1)P'+2P-2P(1)$

1) Montrer que $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est une base de E .

2) Montrer que φ est un endomorphisme de E . Calculer $\varphi(P_k)$ pour k variant de 0 à n .

3) Montrer que (P_0,P_1,P_2) est une base de $Ker\varphi$ et $(P_3,P_4,\ldots,P_n)$ est une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

23 ***Soit*** $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ***et*** $I=I_3$. Calculer J^k pour $\forall k\in\mathbb{N}$ et en déduire A^n pour $n\in\mathbb{N}$

24 Soit $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ .Montrer $\forall n\in N^* \quad \exists\, a_n, b_n\in Z \quad A^n=a_nA+b_nA^2$

Déterminer les valeurs de a_n *et* b_n .En déduire A^n

25 Soit $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ .Soit f définie sur $E=M_2(\mathbb{R})$ par $\forall M\in E \quad f(M)=AM$

Montrer que $f\in L(E)$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de E

Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $Kerf$

26 Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E

Soit $f \in L(E)$ telle que $Mat_B(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A$.

1) Déterminer (e_1', e_2') une base de $Ker(f - Id)$ et (e_3') une base de $Ker(f - 4\,Id)$
2) Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de E appelée B' .Déterminer $D = Mat_{B'}(f)$.
3) Calculer D^n et en déduire un moyen de calculer A^n
4) Soit $p = \frac{1}{3}(f - Id)$ .Montrer que p est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques

27 ***Soit*** $u \in L(\mathbb{R}^3)$ ***tel que*** $u^3 = -u$, $u \neq 0$, $u^2 \neq -Id$

a) Montrer que u est non injectif
b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker\,u \oplus Ker(u^2 + Id)$
c) Montrer qu'il existe une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(indication : prendre $e_2 \in Ker(u^2 + Id)$ tel que $e_2 \neq 0$, $e_3 = u(e_2)$. Dans quel sev doit on prendre e_1 ?)