Algèbre linéaire , matrices

1 Soit $u \in L(E)$ telle que $\forall x \in E \quad u(x) \in Vect(x)$ .Montrer que u est une homothétie .

2 Soient E et F deux K-espaces vectoriels , $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,E)$ vérifiant $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = Kerf \oplus \operatorname{Im} g$. Que peut-on dire alors de $rg(f)$ et $rg(g)$ ***si*** E et F sont de dimension finie ?

3 Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E . Soit F' (resp G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (resp dans G) . Montrer que $F+G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$

4 Soit $u \in L(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$ .On dit que u *est nilpotent d'indice* k .

1) Montrer les inclusions strictes $\{0\} \subset Ker(u) \subset Ker(u^2) \subset \cdots \subset Ker(u^{k-1}) \subset E$

2) Montrer que si E est de dimension finie n alors $k \leq n$ (et donc $u^n = 0$)

5 Soient p et q deux projecteurs de E . Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = q \circ p = 0$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur de E

Dans ce cas , déterminer $Ker(p+q)$ et $\operatorname{Im}(p+q)$

6 On suppose que $\dim E$ est finie , soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$

7 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) = n \geq 1$; On suppose qu'il existe $n+1$ rationnels $r_0, \dots, r_n$, distincts deux à deux tels que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(r_k) \in \mathbb{Q}$ .Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

8 Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p éléments 2 à 2 distincts dans $[0,1]$.On pose $F = \{f \in E \setminus \forall i \in [\![1,p]\!] \ f(a_i) = 0\}$

Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E

9 Soit $f \in L(E)$ tel que $f^3 = -2f^2 + 3f$ .Montrer que $E = Kerf \oplus Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + 3\, Id_E)$

10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $M_n(K)$ .On suppose que $\forall M \in M_n(K) \ tr(AM) = tr(BM)$ .Montrer que $A = B$

11 Existe-t-il des matrices A et B dans $M_n(K)$ telles que $AB - BA = I_n$?

12 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A et A' sont semblables .

13 Soit A une matrice carrée de rang 1 .

1) Montrer qu'il existe C une colonne non nulle et L une ligne non nulle telles que $A = CL$. Montrer alors que $Tr(A) = LC$.

2) Montrer que $A^2 = tr(A)A$

14 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé .Déterminer la matrice de f dans la base (e_2, e_4, e_1, e_3) . En déduire un plan stable par f

15 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$

1) Montrer que $rgM = rgA + rgB$. En déduire que M est inversible si et seulement si A et B le sont
2) Calculer M^{-1} si elle existe (résoudre le système $\begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$) .

16 Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique , déterminer la matrice de la projection sur le plan $P : x + 2y - 2z = 0$ parallèlement à la droite $D = Vect(-2, 1, 2)$

17 Résoudre dans $M_5(\mathbb{R})$ l'équation $3X + 2X^T = tr(X)I_5$

18 Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $rgA = rgA^2 = p$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A

i. Montrer que $Ker(f) = Ker(f^2)$

ii. Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} f \oplus Kerf$

iii. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in GL_p(\mathbb{R})$

19 Soit $(p_1, \dots, p_n)$ une famille de projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E

On suppose que $p = p_1 + \dots + p_n$ est un projecteur . Montrer que $rg\, p = \sum_{i=1}^{n} rg\, p_i$

20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $Tr(A) \neq 0$

.Soit $f : M \in M_n(\mathbb{R}) \quad \mapsto (TrA)M - (TrM)A$

Montrer que $f \in L(M_n(\mathbb{R}))$ .déterminer le noyau et l'image de f

21 Soit $f \in L(E)$, p un projecteur de E.

Montrer que f commute avec $p \Leftrightarrow \operatorname{Im} p$ et $Kerp$ sont stables par f

Indication : pour $\Leftarrow$, exploiter le fait que $E = Kerp \oplus \operatorname{Im} p$

22 X-ENS Soit E un espace vectoriel de dimension finie. f et g des endomorphismes de E

Montrer que $rg(f) + rg(g) = rg(f+g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $E = Kerf + Kerg$