Déterminants

1 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})$ .On pose pour $z \in \mathbb{C}$ $A(z) = (a_{i,j} + z)$

Montrer que la fonction $z \mapsto \det A(z)$ est polynômiale de degré inférieur ou égal à 1 .

Application : pour $a, b, c \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$

2 Calculer le déterminant de la matrice décomposée en blocs carrés de taille n : $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 4A \end{pmatrix}$

3 Soient A, B, C des matrices carrées de taille n .Calculer $\det\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

4 Soit $(A, B) \in GL_n(K)^2$ tel que $AB + BA = 0$, montrer que n est pair .

5 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$

Montrer que M est inversible si et seulement si A et B le sont

6 Calcul de déterminants : Calculer les déterminants suivants

1) $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{vmatrix}$

2) Déterminants d'ordre n

$\begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$; $\det\left(|i-j|\right)_{1 \le i, j \le n}$

7 Soit $\begin{array}{rcl} \varphi : M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A + 2A^T \end{array}$ .Calculer $\det \varphi$ et $tr(\varphi)$

8 Soit A_n la matrice carrée dont tous les coefficients valent 1 sauf les coefficients diagonaux qui valent $a_{ii} = i+2$ .Montrer que $\det A_n = \det\left(u+2e_1, u+3e_2, \dots, u+(n+1)e_n\right)$ avec $u = (1,1,\dots,1)$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ .En déduire que $\det(A_n) = (n+1)!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$

9 Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $a_{i,j} = 1$ ou -1 . Montrer que 2^{n-1} divise $\det A$

10 Soit $n \ge 2$ et $\left(\lambda_j\right)_{1\le j\le n}$ une famille d'éléments de K deux à deux distincts tels que $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k = 0$. Montrer que l'un des λ_j est nul .

11 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes et $P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)$ pour $x \in \mathbb{C}$

Et $$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \frac{P(x)}{x-\lambda_1} & \frac{P(x)}{x-\lambda_2} & \cdots & \cdots & \frac{P(x)}{x-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & & & & \lambda_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Montrer qu'on peut prolonger Δ par continuité en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et calculer $\Delta(\lambda_1), \dots, \Delta(\lambda_n)$

Montrer que Δ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ et le calculer

12 Montrer que si A , B , C , D des éléments de $M_n(K)$ tels que $DC = CD$ et D est inversible .

alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

(indication : écrire $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ avec * des blocs à déterminer)