Suites et séries de fonctions

1) Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+n}{n+4nx^2}$. Puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$.

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

d) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^n(1-x)$ .Puis étudier la convergence uniforme sur $[0,a]$ (avec $0 < a < 1$)

e) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n\ln\left(1+x^n\right)$ .Puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)dt$

f) $f_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{nx}\right)$. (on pourra montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |\cos x - 1| \le x$)

2) Etudier la convergence simple , normale et uniforme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n x}{(1+nx)^2}$ sur $\mathbb{R}^+$

3) Etudier la convergence simple et normale de $\sum x^{n^2}$ sur $]-1,1[$, puis convergence normale locale

4) Etudier la convergence simple de $\sum (-1)^n \dfrac{x}{n+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis convergence uniforme locale

5) Etudier la continuité de $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ sur $]1,+\infty[$

6) Etudier la continuité de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+x^n\right)$ sur $]-1,1[$

Montrer que si $x \to 1^-$, $f(x) \sim \dfrac{K}{1-x}$ ***avec*** $K = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+e^{-u}\right)du$

7) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Arc}\tan(nx)}{n^2}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

8) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Etudier la convergence simple , normale et uniforme de cette série sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser le sens de variation de f

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1)+f(x)=\dfrac{1}{x}$. Donner un équivalent de f en 0

4) Donner un équivalent de f en $+\infty$

9) Montrer que a) $\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

b) $\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

10) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ .Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{-x} f(x)$ et en déduire f

11) On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ .Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par f .

12) Soit $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+x)^2}$.

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$

2) Donner un équivalent en $+\infty$.

13) On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x)=\dfrac{x}{shx}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_n(x)=\dfrac{1}{\left(sh(nx)\right)^2}$

1) Montrer que F est prolongeable par continuité en 0 et est bornée sur $\mathbb{R}^+$

2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $S=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

3) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier ses variations.

4) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$

5) Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \to 0^+$ (on étudiera la limite de $x^2 S(x)$)

14) Montrer que $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2 (n+1)}$

15) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$

16) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et une suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$

Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt$. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$