Problème 1 d'après E3A PSI 2002

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$

I 1) $x \in \mathbb{R}_+$

si $x=0$ $\quad u_n(0)=0$ $\quad$ donc $\sum u_n(0)$ converge

si $x>0$ $\quad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$

$\alpha>0$ donc $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge $\quad (\alpha+1>1)$

donc $\sum u_n(x)$ converge

donc $\sum u_n$ CS sur $\mathbb{R}_+$

$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

2) $\varphi_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$

φ_n dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\varphi_n'(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
φ_n'		$+$	0	$-$	
φ_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\times\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} = \|\varphi_n\|_\infty$$

3) $u_n(x) = \dfrac{\varphi_n(x)}{n^\alpha}$

$$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^\alpha}\|\varphi_n\|_\infty = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$\sum \|u_n\|_\infty$ converge ssi $\alpha+\frac{1}{2}>1$ $\quad$ (série de Riemann)

$\sum u_n$ CN sur $\mathbb{R}_+$ $\iff \alpha > \frac{1}{2}$

4) $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$|u_n(x)| \leq \frac{b}{n^\alpha(1+na^2)}$$

par passage au sup :

$$\|u_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{b}{n^\alpha(1+na^2)}$$

$$\frac{b}{n^\alpha(1+na^2)} \sim \frac{b}{n^{\alpha+1}a^2} \qquad \sum \frac{b}{n^{\alpha+1}a^2} \text{ converge car } \alpha+1>1$$
$(a>0)$

donc $\sum \|u_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge

$\sum u_n$ CN sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$

5) $\alpha \leq \frac{1}{2}$ $\quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u_k(x) \geq 0$

donc $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$

$k \leq 2n$ donc $k^\alpha \leq (2n)^\alpha \leq (2n)^{1/2}$ car $\alpha \leq \frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$ $\quad (k \in [\![n+1, 2n]\!])$

donc $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}\,(1+kx^2)}$

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \geq \frac{1}{1+\frac{2n}{n}} \quad \text{car } k \leq 2n$$

$\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \geq \frac{1}{3}$ donc $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}\,n} \times n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

donc $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \not\to 0 \ (n \to +\infty)$.

b) si $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $[0,a]$ $(a>0)$

alors $\|R_n\|_\infty^{[0,a]} \to 0$ $(n\to+\infty)$

or $\underbrace{|R_n(\frac{1}{\sqrt{n}})|}_{\not\to 0} \leq \underbrace{\|R_n\|_\infty^{[0,a]}}_{\to 0}$ (APCR $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq a$)

contradiction

donc $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,a]$

II

6) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $S(x) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} u_n(x)$

$\sum u_n$ CS sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$

u_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$u'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2 n^\alpha}$$

$[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [a,b]$

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1+nb^2}{(1+na^2)^2 n^\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \|u'_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{1+nb^2}{(1+na^2)^2 n^\alpha} = v_n$$

$v_n \sim \frac{nb^2}{n^2 a^4 n^\alpha} = \frac{b^2}{a^4 n^{\alpha+1}}$ $\quad \sum v_n$ converge car $\alpha+1>1$

donc $\sum \|u'_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge

donc $\sum u'_n$ CN sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$

donc CU

donc d'après le th de dérivation terme à terme

S est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

7) si $\alpha > \frac{1}{2}$ $\sum u_n$ CN sur $\mathbb{R}_+$ d'après I3) donc CU sur $\mathbb{R}_+$

donc comme u_n est continue

par transmission de la continuité S est continue sur $\mathbb{R}_+$

donc S est continue en 0

8) $\alpha \leq \frac{1}{2}$

a) $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f(t) = \dfrac{x}{t^\alpha (1+tx^2)}$

$t \to 0$ $\quad f(t) \sim \dfrac{x}{t^\alpha}$ intégrable en 0 car $\alpha < 1$

$t \to +\infty$ $\quad f(t) \sim \dfrac{x}{t^{\alpha+1} x^2}$ intégrable en $+\infty$ car $\alpha+1 > 1$

donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

b) f est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq \frac{x}{n^\alpha (1+nx^2)} \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

$\int_0^{+\infty} f$ converge, $\int_1^{+\infty} f$ converge et $\sum u_n(x)$ converge

donc on peut faire la somme de $n=1$ à $+\infty$.

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

c) posons $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt$

changement de variable $u = \sqrt{t}$ $\quad u^2 = t$ $\quad dt = 2udu$

$\varphi :$ $\begin{array}{l} [1,+\infty[\to [1,+\infty[\\ u \mapsto u^2 \end{array}$ est C^1, bijective, strict $\nearrow$.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{u(1+u^2x^2)} 2udu = \int_1^{+\infty} \frac{2x}{1+u^2x^2} du$$

$I = 2[\operatorname{Arctan} ux]_1^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)$

$\underline{I = \pi - 2\operatorname{Arctan} x}$

$S(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)} dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt$ car $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{t^{1/2}}$ $(\alpha \leq \frac{1}{2})$

$\underline{S(x) \geq \pi - 2\operatorname{Arctan} x}$

$x \to 0$ $\quad \operatorname{Arctan} x \to 0$ $\quad S(x) \not\to 0 \ (x \to 0)$

or $S(0) = 0$

donc $\underline{S \text{ n'est pas continue en } 0}$

d) $\alpha = \frac{1}{2}$. On a déjà établi que $S(x) \geq \pi - 2\operatorname{Arctan} x$

on a aussi: $S(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt$

avec le changement de variable $u = \sqrt{t}$

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+u^2x^2} du = 2[\operatorname{Arctan} ux]_0^{+\infty}$
$= \pi$

$\pi - 2\operatorname{Arctan} x \leq S(x) \leq \pi$

$\underline{x \to 0 \quad S(x) \to \pi}$

III $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$ $\quad \alpha > 0 \quad u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$

g) $((-1)^{n-1} u_n(x))$ est alternée

$(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et $u_n(x) \to 0 \ (n \to +\infty)$

donc $\sum (-1)^{n-1} u_n(x)$ vérifie le TSSA sur $\mathbb{R}_+$

donc $\underline{\sum (-1)^{n-1} u_n \text{ CS sur } \mathbb{R}_+}$

d'après le TSSA $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$

avec $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} u_k(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $|R_n(x)| \leq \dfrac{x}{(n+1)^\alpha (1+(n+1)x^2)} = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \varphi_{n+1}(x)$

d'après I 2), $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\varphi_n(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

donc $\varphi_{n+1}(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}$

donc $\|R_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \to 0$ $(n \to +\infty)$

donc $\|R_n\|_\infty \to 0$ $(n \to +\infty)$ et $\forall n$ $(-1)^{n-1} u_n$ est continue

donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$

en particulier $F(x) \to F(0)$ $(x \to 0)$.

10) $F(x) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{((-1)^{n-1} - 1) \dfrac{x}{n^\alpha (1+nx^2)}}$

les termes pour n impair s'annulent

$F(x) - S(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} ((-1)^{2p-1} - 1) \dfrac{x}{(2p)^\alpha (1+2px^2)}$ (termes pour $n = 2p$)

$F(x) - S(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{-2x}{(2)^\alpha p^\alpha (1+p(\sqrt{2}x)^2)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}x)}{2^\alpha p^\alpha (1+p(\sqrt{2}x)^2)}$

$F(x) - S(x) = -\dfrac{1}{2^{\alpha-\frac{1}{2}}} S(\sqrt{2}x)$

$F(x) - S(x) = -2^{\frac{1}{2}-\alpha} S(\sqrt{2}x)$

Supposons $\alpha < \frac{1}{2}$. $x \to 0$ $F(x) \to F(0) = 0$

Supposons que $S(x) \to \ell$ $(x \to 0)$ $\ell \in \mathbb{R}$

alors par passage à la limite

$$-\ell = -2^{\frac{1}{2}-\alpha}\ell$$

$\ell \neq 0$ (car sinon S serait continue en 0, ce qui n'est pas le cas d'après 8c))

donc $2^{\frac{1}{2}-\ell} = \cancel{0}1$ donc $\frac{1}{2}-\ell = 0$ contradiction

donc S n'admet pas de limite finie en 0 si $\alpha < \frac{1}{2}$

---

11) $x S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}$ $\quad h_n : x \mapsto \frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}$

$x > 0$ $\quad \frac{x^2}{1+nx^2} \leq \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad |h_n(x)| \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

$\|h_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ $\quad \sum \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge car $\alpha+1 > 1$

donc $\sum \|h_n\|_\infty$ converge donc $\sum h_n$ CN sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\sum h_n$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

et $h_n(x) \to \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ $(x \to \infty)$

donc d'après le th de la double limite

$$x S(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \quad (x \to \infty)$$

$$S(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{c}{x} \qquad c = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

donc S n'est pas intégrable en $+\infty$.

---

12) $\frac{S(x)}{x} \sim \frac{c}{x^2}$ $(x \to +\infty)$ donc $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(1+nx^2)}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{S(x)}{x} = \int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(1+nx^2)} dx$$

$h_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n^\alpha(1+nx^2)}$ $\quad n \geq 1$

h_n est cpm et intégrable sur $[1,+\infty[$ $\left(h_n(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha+1} x^2} \right)$

$\sum h_n$ CS sur $[1,+\infty[$

vers $x \mapsto \dfrac{S(x)}{x}$ qui est cpm sur $[1,+\infty[$

$$\int_1^{+\infty} |h_n(x)| dx = \frac{1}{n^\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+nx^2} = \frac{1}{n^\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \sqrt{n} x \right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \sqrt{n} \right) = \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

si $n \to +\infty$ $\quad \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} |h_n(x)| dx \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ $\quad (n \to +\infty)$

donc $\displaystyle\sum \int_1^{+\infty} |h_n(x)| dx$ converge.

donc d'après le th d'intégration terme à terme

$$\int_1^{+\infty} \frac{S(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1 h_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

---

problème 2 $\quad \alpha>0 \quad S_\alpha(x)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$

d'après EPITA 2019

I

1) (a) $S_1(x)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} e^{-xn} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}(e^{-x})^n$

c'est une série géométrique de raison e^{-x}

elle converge ssi $e^{-x}<1$ c'est à dire $x>0$

donc S_1 est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$x\mapsto \sum e^{-xn}$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$ et $S_1(x)=\dfrac{1}{1-e^{-x}} \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*$

(b) $x\to 0 \quad 1-e^{-x}\sim x \qquad S_1(x)\sim \dfrac{1}{x} \quad (x\to 0^+)$

$S_1(x)\to +\infty \ (x\to 0^+)$

(c) $x\to+\infty \quad e^{-x}\to 0 \quad S_1(x)\to 1 \ (x\to+\infty)$

$S_1(x)-1=\dfrac{1}{1-e^{-x}}-1=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\sim e^{-x} \quad (x\to+\infty)$

2) $S_\alpha(x)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$

si $x>0 \quad \sum e^{-xn^\alpha}$ converge $\left(e^{-xn^\alpha}=o\left(\frac{1}{n^2}\right) n\to+\infty \right)$

si $x\leq 0 \quad e^{-xn^\alpha}\not\to 0$ donc $\sum e^{-xn^\alpha}$ diverge

donc S_α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$\left(\sum e^{-xn^\alpha} \text{ CS sur } \mathbb{R}_+^* \right)$

3) (a) $\varepsilon>0 \quad f_n : x\mapsto e^{-xn^\alpha}$

$\forall x\in[\varepsilon,+\infty[\quad |f_n(x)|\leq e^{-\varepsilon n^\alpha}$

$\Rightarrow \|f_n\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}\leq e^{-\varepsilon n^\alpha}$

$\sum e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge car $\varepsilon>0$ (d'après 2)) donc $\sum f_n$ CN sur $[\varepsilon, +\infty[$

$\forall n$ f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$\sum f_n$ CN donc CU sur tout $[\varepsilon, \alpha] \subset \mathbb{R}_+^*$

donc d'après le th de transmission de continuité, S_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

(b) $0 < x \leq y$ $\quad e^{-yn^\alpha} \leq e^{-xn^\alpha}$

$\sum e^{-yn^\alpha}$ et $\sum e^{-xn^\alpha}$ convergent donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-yn^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$$

$$S_\alpha(y) \leq S_\alpha(x)$$

donc S_α est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

S_α est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$ (th de la limite monotone)

plus précisément : si S_α est majorée, elle admettra une limite finie en 0

- S_α est minorée par 0 donc admet une limite finie en $+\infty$ (car $\downarrow$).

(c) $x \to +\infty$ $\quad \sum f_n$ CN sur $[\varepsilon, +\infty[$ $\quad (\varepsilon > 0)$

donc $\sum f_n$ CU sur $[\varepsilon, +\infty[$

$f_n(x) = e^{-xn^\alpha} \to \begin{cases} 0 & (x \to +\infty) \text{ pour } n \geq 1 \\ 1 & (x \to +\infty) \text{ pour } n = 0 \end{cases}$

donc d'après le th de la double limite

$S_\alpha(x) \to 1$ $(x \to +\infty)$

(d) $S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$ car tous les termes sont ≥ 0

$\lim_{x\to 0} S_\alpha(x)$ existe et $\sum_{n=1}^{N} e^{-xn^\alpha} \to N+1$ $(x \to 0)$

donc par passage à la limite lorsque $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geq N+1$$

ceci est vrai $\forall N \in \mathbb{N}$

en faisant $N \to +\infty$, on obtient $\lim_{x\to 0} S_\alpha = +\infty$

II $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ $\quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$ $\quad (\alpha > 0)$

a) $u \to 0$ $\quad e^{-u} u^{\alpha-1} \sim u^{\alpha-1} = \frac{1}{u^{1-\alpha}}$ intégrable en 0 ssi $1-\alpha < 1$ c'est à dire $\alpha > 0$

donc $\int_0^1 e^{-u} u^{\alpha-1} du$ existe ssi $\alpha > 0$

$u \to +\infty$ $\quad e^{-u} u^{\alpha-1} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ existe $\forall \alpha$

ainsi $\Gamma(\alpha)$ converge ssi $\alpha > 0$

b) $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^\alpha du$ $\quad \alpha > 0$

$A = u^\alpha$ $\quad A' = \alpha u^{\alpha-1}$

$B' = e^{-u}$ $\quad B = -e^{-u}$ $\quad A, B$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$A(u)B(u) \to 0$ $(u \to 0)$

$\to 0$ $(\text{si } u \to +\infty)$

donc $\Gamma(\alpha+1) = \left[-u^\alpha e^{-u}\right]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$$

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$

donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \Gamma(n+1) = n!$

(c) $x>0$ $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du$

Changement de variables $u=x t^{\alpha}$

$du = x\alpha t^{\alpha-1}dt$ $\quad \varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est C^1 bijective

$u \mapsto \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ strict ↗.

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}} \cdot (xt^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\alpha x t^{\alpha-1}dt$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}dt=\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}dt$$

$\underline{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha x^{\frac{1}{\alpha}} I(\alpha)}$ cela implique que $I(\alpha)$ converge.

5) $t \mapsto e^{-xt^{\alpha}}$ est ↓ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc
$$\underbrace{\int_n^{n+1} e^{-xt^{\alpha}}dt \le e^{-xn^{\alpha}}}_{①} \underbrace{\le \int_{n-1}^{n} e^{-xt^{\alpha}}dt}_{②}$$

①: on somme pour n allant de 0 à $+\infty$ (les intégrales et
②: on somme pour n allant de 1 à $+\infty$ la série convergent)

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}dt \le \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^{\alpha}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^{\alpha}} \le \int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}dt$$

donc $I(\alpha) \le S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(x)-1 \le I(\alpha)$

$$0 \le S_\alpha(x) - I(\alpha) \le 1$$

$I(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ donc $\underline{0 \le S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \le 1}$

(b) $x\to 0$ $\quad S_\alpha(x) \geq \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \to +\infty \quad (x\to 0)$

donc $S_\alpha(x) \to +\infty \quad (x\to 0)$

$$0 \le \alpha x^{1/\alpha} S_\alpha(x) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \le \alpha x^{1/\alpha} \to 0 \ (x\to 0)$$

donc $\alpha x^{1/\alpha} S_\alpha(x) \to \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \ (x \to 0)$

donc $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\alpha x^{1/\alpha}}$ $(x \to 0)$.

6) (a) ch^t de var $u = x t^\alpha$ $t = \left(\frac{u}{x}\right)^{1/\alpha}$, $dt = \frac{1}{x^{1/\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \int_x^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{x^{1/\alpha}} \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$$

(b) $\alpha > 0$ $x > 0$

$$J_x = \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$$

IPP $A = u^{\frac{1}{\alpha}-1}$ $A' = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right) u^{\frac{1}{\alpha}-2}$

$B' = e^{-u}$ $B = -e^{-u}$ A, B C^1 sur $[x, +\infty[$

$A(u)B(u) \to 0$ $(u \to \infty)$

$$J_x = \left[-u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}\right]_x^{+\infty} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du$$

$$J_x = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du + x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x} = \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$$

$u \geq x \Rightarrow u^{\frac{1}{\alpha}-2} = u^{\frac{1}{\alpha}-1-1} \leq u^{\frac{1}{\alpha}-1} x^{-1}$

$$0 \leq \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du$$

donc si $x \to +\infty$ $\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du = o\left(\int_x^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du\right)$

donc $\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x} + o\left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du\right)$

donc $\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \sim x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x}$ $(x \to +\infty)$

(c) donc $\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt \sim \frac{1}{\alpha} x^{-1} e^{-x}$ $(x \to +\infty)$

donc $\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = o(e^{-x}) \quad (x \to +\infty)$

7. $\alpha > 0 \quad x > 0$

a) de la même façon qu'à la question 5) a)

$$e^{-xn^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-xt^\alpha} dt$$

en sommant de n allant de 2 à $+\infty$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$$

$$0 \leq S_\alpha(x) - 1 - e^{-x} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$$

$$0 \leq \frac{S_\alpha(x) - 1}{e^{-x}} - 1 \leq \frac{\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt}{e^{-x}} \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

donc $\dfrac{S_\alpha(x) - 1}{e^{-x}} \to 1 \quad (x \to +\infty)$

$$S_\alpha(x) - 1 \sim e^{-x} \quad (x \to +\infty)$$

problème 3 d'après ENSAIT 1994.

I $I = \int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx$

1) $\varphi : x \mapsto \ln x \ln(1-x)$ est continue sur $]0,1[$

si $x \to 0^+$ $\ln(1-x) \sim -x$ $\varphi(x) \sim -x\ln x \to 0$ $(x\to 0)$

$\varphi(x) \to 0$ $(x \to 0)$

si $x \to 1^-$ $\ln x = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ $\varphi(x) \sim (x-1)\ln(x-1) \underset{(x\to 1)}{\to} 0$

$\varphi(x) \to 0$ $(x\to 1)$

donc on peut prolonger φ par continuité en 0 et 1

en posant $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1)=0$

2) $J_n = \int_0^1 x^n \ln x\,dx$

$n \geq 1$ si $x \to 0$ $x^n \ln x \to 0$ donc $x \mapsto x^n \ln x$ est intégrable en 0

(intégrale faussement impropre)

J_n converge.

IPP : $u' = x^n$ $u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ u, v C^1 sur $]0,1]$

$v = \ln x$ $v' = \frac{1}{x}$

$u(x)v(x) \to 0$ $(x\to 0)$

$$J_n = \left[(\ln x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2} = J_n$$

3) $u_n(x) = \frac{x^n \ln x}{n}$ si $x \in]0,1]$ et $u_n(0)=0$ $(n\geq 1)$

a) u_n est dérivable sur $]0,1]$

$\forall x \in]0,1]$ $u_n'(x) = \frac{1}{n}\left[n x^{n-1}\ln x + x^n \times \frac{1}{x}\right]$

$u_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n}[n\ln x + 1]$

$u_n'(x) \geq 0 \iff n\ln x + 1 \geq 0 \iff \ln x \geq -\frac{1}{n} \iff x \geq e^{-1/n}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & e^{-1/n} & & 1 \\
\hline
u_n' & & - & 0 & + & \\
\hline
u_n & 0 & \searrow & & \nearrow & 0
\end{array}$$

$$u_n(e^{-1/n}) = \frac{(e^{-1/n})^n \ln(e^{-1/n})}{n} = \frac{e^{-1}(-\frac{1}{n})}{n} = -\frac{1}{n^2} e^{-1}$$

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |u_n(x)| = \left|-\frac{1}{n^2} e^{-1}\right| = \frac{1}{n^2} e^{-1}$$ (car $u_n(x) \leq 0$ sur $[0,1]$)

$\sum \|u_n\|_\infty$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \ln x = -\ln(1-x)\ln x = -\varphi(x)$$

b) $I = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx$

$\forall n$ u_n est continue sur $[0,1]$

$\sum u_n$ CN sur $[0,1]$ donc CU sur $[0,1]$

donc d'après le th d'intégration terme à terme sur un segment $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx$

$$\Rightarrow I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{n}\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} J_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = I$$

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{(n+1)^2}$$

$a = 1$ $c = -1$

en multipliant par n : $\frac{1}{(n+1)^2} = a + \frac{bn}{n+1} + \frac{cn}{(n+1)^2}$

en prenant la limite en $+\infty$: $0 = a + b \Rightarrow b = -1$

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{1}{N+1} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2}$$

$$\to 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (N \to +\infty)$$

donc $I = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

II 4) $P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^n - (X-i)^n\right)$

a) $P_n = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k i^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-i)^{n-k}\right)$

les termes en X^n s'annulent

$$P_n = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k \left(i^{n-k} - (-i)^{n-k}\right)$$

le terme en X^{n-1} est $\frac{1}{2i}\binom{n}{n-1} X^{n-1}\left(i - (-i)\right) = n X^{n-1}$

donc $\deg P_n = n-1$ et le coeff dominant de P_n est n

b) $x \in \mathbb{C}$ $\quad P_n(x) = 0 \iff (x+i)^n - (x-i)^n = 0$

$\iff \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 0$ $\quad$ ($x = i$ n'est pas solution)

$\iff \frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $\quad k \in [\![0, n-1]\!]$

$x + i = x e^{\frac{2ik\pi}{n}} - i e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff x = \frac{-i - i e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$ $\quad (k \neq 0)$

on pose $x_k = i\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}$ $\quad k\in[\![1,n-1]\!]$

$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ sont les racines de P_n dans $\mathbb{C}$.

$$x_k = i\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}} = i\dfrac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = \cotan\frac{k\pi}{n}$$

$\underline{x_k = \cotan\frac{k\pi}{n} \quad k\in[\![1,n-1]\!]}$ sont les racines de P_n.

$$\underline{P_n = n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \cotan\frac{k\pi}{n}\right)}$$

5) a) $P_{2n+1}(-X) = \frac{1}{2i}\left[(-X+i)^{2n+1} - (-X-i)^{2n+1}\right]$

$= \frac{1}{2i}\left[-(X-i)^{2n+1} + (X+i)^{2n+1}\right]$

$$\underline{P_{2n+1}(-X) = P_{2n+1}(X)}$$

$P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \qquad P_{2n+1}(-X) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k X^k$

$\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k(-1)^k X^k$

par unicité des coeff d'un polynôme:

$\forall k \quad a_k = (-1)^k a_k$

si k est impair : $\quad a_k = -a_k \Rightarrow a_k = 0$

donc $\forall i \quad a_{2i+1} = 0 \qquad \underline{P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^{2k}}$

$(a_{2n} \neq 0)$

b) on pose $Q_n = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^k$

on a alors $\underline{Q_n(X^2) = P_{2n+1}}$

le coeff dominant de Q_n est $a_{2n} \neq 0$

donc $\underline{\deg Q_n = n}$

$\forall x \in \mathbb{C}$ $\quad P_{2n+1}(x) = 0 \iff Q_n(x^2) = 0$

$P_{2n+1}\left(\text{cotan} \frac{k\pi}{2n+1}\right) = 0$ donc $Q_n\left(\text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right) = 0$

pour $k \in [\![1, n]\!]$ $\quad \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ est racine de Q_n

a t'on trouvé toutes les racines de Q_n ?

Soit $h(x) = \text{cotan}^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $\quad x \in]0, \frac{\pi}{2}]$

h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

$$h'(x) = \frac{-2\cos x \sin x \sin^2 x - \cos^2 x (2\sin x \cos x)}{\sin^4 x}$$

$$h'(x) = -2 \frac{\cos x \sin^3 x + \sin x \cos^3 x}{\sin^4 x}$$

$$= -2 \frac{\cos x \sin^2 x + \cos^3 x}{\sin^3 x} = -2 \frac{\cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^3 x}$$

$$h'(x) = -2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} < 0 \text{ sur }]0, \tfrac{\pi}{2}[$$

h est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et continue

	0		$\frac{\pi}{2}$
h	$+\infty$	$\searrow$	0

h est bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}_+^*$

donc h est injective sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

or si $k \in [\![1, n]\!]$ $\quad 0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$

donc pour $k, k' \in [\![1, n]\!]$ $\quad k \neq k' \Rightarrow \cot an^2 \frac{k\pi}{2n+1} \neq \cot an^2 \frac{k'\pi}{2n+1}$

Q_n admet donc n racines distinctes

$\deg Q_n = n$ donc on a trouvé toutes les racines de Q_n

les racines de Q_n sont donc $\cot an^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ $\quad k \in [\![1, n]\!]$

c) $\sum_{k=1}^{n} \cot an^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ = somme des racines de Q_n

$$= \frac{-\text{coeff du terme en } X^{n-1} \text{ dans } Q_n}{\text{coeff du terme en } X^n \text{ dans } Q_n} = \frac{-a_{2n-2}}{a_{2n}}$$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^k$$

coeff dominant de Q_n : a_{2n} = coeff dominant de P_{2n+1}

$$a_{2n} = 2n+1$$

coeff du terme en X^{n-1} dans Q_n $= a_{2n-2}$

= coeff du terme en X^{2n-2} dans P_{2n+1}

$$P_{2n+1} = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} X^k \left(i^{2n+1-k} - (-i)^{2n+1-k} \right)$$

terme en X^{2n-2} dans P_{2n+1} : pour $k = 2n-2$

$$a_{2n-2} = \frac{1}{2i} \binom{2n+1}{2n-2} \left(i^3 - (-i)^3 \right) = - \binom{2n+1}{2n-2}$$

$$a_{2n-2} = - \frac{(2n+1)!}{(2n-2)!\,3!} = - \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = -\frac{1}{3} (2n+1) n (2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cot an^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\frac{1}{3}(2n+1) n (2n-1)}{2n+1} = \frac{1}{3} n (2n-1)$$

6) $u(x) = x - \sin x \qquad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$u'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \qquad u \nearrow$ et $u(0) = 0$ donc $u \geq 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$v(x) = \tan x - x \qquad v'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$

$v \nearrow$ et $v(0) = 0$ donc $v \geq 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

donc $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \sin x \leq x \leq \tan x$

donc

$$\frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x} \qquad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

donc $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2 x$

---

7) $x = \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq 1 + \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} n + \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

$$\underbrace{\pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}}_{\to \frac{\pi^2}{6} \ (n \to +\infty)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{\frac{\pi^2 n}{(2n+1)^2}}_{\to 0 \ (n\to+\infty)} + \underbrace{\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{1}{3} n(2n-1)}_{\to \frac{\pi^2}{6} \ (n\to+\infty)}$$

donc par encadrement $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

donc $I = 2 - \frac{\pi^2}{6}$